数学IA演習　シケプリ

◎ これは定義です

- これは定理です

最重要の項目は赤色で表示します
重要な項目は青色で表示します

1　実数の性質

実数には、四則演算、大小関係、連続性という 3 つの性質があります。ここでは、任意のからでない実数の部分集合 A を考えます。その A に対して、下界・上界・有界、下限・上限を定義します。

◎ $\alpha(\in\mathbb{R})$ は A の下 (上) 界 $\Longleftrightarrow$ $\forall a \in A$ に対して $\alpha \leq a (\alpha \geq a)$

◎ A が下 (上) に有界 $\Longleftrightarrow$ A の下 (上) 界である実数が存在

◎ αは A の下界（αを $\inf A$ と表す）$\Longleftrightarrow$ αは A の下界かつ$\alpha < c$ である実数 c は A の下界でない

◎ αは A の上界（αを $\sup A$ と表す）$\Longleftrightarrow$ αは A の上界かつ$\alpha > c$ である実数 c は A の上界でない

- 上限公理　$\cdots$　A が上に有界 $\Longrightarrow$ A の上限である実数が存在
- アルキメデスの定理　$\cdots$　$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}(or\mathbb{R})\ s.t.\ N\varepsilon > 1$ が成り立つ

2　数列の収束・発散

実数列 $\{a_n\}$ の収束・発散、また収束するときの四則演算と大小関係を定義します。ここでは主に $\varepsilon - \delta$ 論法を用います。

◎ $a \in \mathbb{R}, \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ $\Longleftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ は a に収束する（$a_n \to a$）

◎ $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall n \geq N \Rightarrow M \leq a_n$ $\Longleftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ は $+\infty$ に発散

◎ $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall n \geq N \Rightarrow M \geq a_n$ $\Longleftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ は $-\infty$ に発散

以下では実数列 $\{b_n\}\{c_n\}$ を考え、それぞれ $b_n \to b$、$c_n \to c$ とする。

- $a_n \leq b_n$が有限個の n を除いて成り立つ $\Rightarrow a \leq b$
- $a = b$ かつ $a_n \leq c_n \leq b_n$が有限個の n を除いて成り立つ $\Rightarrow a = b = c$（はさみうちの原理）
- $a_n \leq b_n$が有限個の n を除いて成り立つとき
  - ・$a_n \to +\infty$（$n \to \infty$）$\Rightarrow b_n \to +\infty$（$n \to \infty$）
  - ・$b_n \to -\infty$（$n \to \infty$）$\Rightarrow a_n \to -\infty$（$n \to \infty$）　（追い出しの原理）

$\{a_n\}$ の部分列を $\{d_n\}$ とする。すなわち、自然数列 $\{n_k\}$ があって、$a_{n_k} = d_k$とすると

- $a_n \to a$（$n \to \infty$）$\Rightarrow d_k = a_{n_k} \to a$（$k \to \infty$）

$\varepsilon - \delta$論法での記述はよく使い、また利用しやすいので確実に身につけましょう

3　実数列の収束条件

実数列 $\{a_n\}$ を $n \in \mathbb{N}$ における集合と考え、有界、単調数列を定義します。

◎ $\{a_n\}$ は下 (上) に有界 $\Longleftrightarrow$ 集合 $\{a_n\}$ は下 (上) に有界

◎ $\{a_n\}$ は有界 $\Longleftrightarrow$ 集合 $\{a_n\}$ は有界

◎ $\{a_n\}$ は広義単調増加 $\Longleftrightarrow a_n \leq a_{n+1}$

◎ $\{a_n\}$ は広義単調現象 $\Longleftrightarrow a_n \geq a_{n+1}$

◎ $\{a_n\}$ は単調数列 $\Rightarrow \{a_n\}$ は広義単調増加或いは広義単調減少

- $\{a_n\}$ は収束 $\Rightarrow \{a_n\}$ は有界
  逆は不成立（$\because$ $a_n = (-1)^n$のとき、$-1 \leq a_n \leq 1$ で有界だが、振動するので収束しない）

- $\{a_n\}$ が単調数列かつ「上に有界または下に有界」のとき
  $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup a_n$または$\inf a_n$
  有界でないときは発散

- （コーシーの収束条件）　$\{a_n\}$ は収束する $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall n, m \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$

- （区間収縮法）　$\{a_n\}$ は広義単調増加、$\{b_n\}$ は広義単調減少
  $a_n \leq b_n$かつ $b_n - a_n \to 0$（$n \to \infty$）$\Rightarrow a_n \leq c \leq b_n$となる実数 c が一意的に存在

- （Bolzano-Weiwestrass の定理）　$\{a_n\}$ が有界 $\Rightarrow \{a_n\}$ の部分列に収束するものがある

4　級数の収束、発散

範囲外

5　無限大、区間・写像

実数と $-\infty$、$+\infty$ の順序、区間、写像に関して定義します。

◎ α, βは $-\infty$、$+\infty$、あるいは実数で$\alpha \leq \beta$
　$\Longleftrightarrow \alpha = -\infty$、または$\beta = +\infty$、または$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ かつ$\alpha \leq \beta$

◎ 実数の部分集合 A に対して、$A = \phi$や有界でないときも上限下限を定義する
$A = \phi \Rightarrow \inf A = +\infty$、$\sup A = -\infty$
A が下 (上) に有界でない $\Rightarrow \inf A = -\infty$（$\sup A = +\infty$）

◎ E は複数の元を持つ実数の部分集合
「$\forall a, b \in E, \forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \Rightarrow x \in E$」$\Longleftrightarrow E$ は区間

◎ f は A から B への写像
f は全射 $\Longleftrightarrow f(A) = B$
f は単射 $\Longleftrightarrow \forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

◎ f は単射, $g(B) = A \Rightarrow g$ は f の逆写像

6　一変数実数値関数の極限

一変数関数の極限、単調関数や合成関数、四則演算の定義をします

◎ $a \in \mathbb{R}$ または $\pm\infty, E \subset \mathbb{R}, E^* = \{x \in E; x \neq a\}$

a は E の集積点 $\Longleftrightarrow a_n \in E^*$かつ $a_n \rightarrow a$ である実数列 $\{a_n\}$ が存在

$\Longleftrightarrow \forall\delta > 0, E^* \cap (a - \delta, a + \delta) = \phi$

$\Longleftrightarrow \forall\delta > 0, E \cap (a - \delta, a + \delta)$ は無限集合

◎ f は E 上関数、$A \in \mathbb{R}$、a は E の集積点

$f(x) \rightarrow A$（$x \rightarrow a$）$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ s.t.\ |f(x) - A| < \varepsilon(x \in E^* \cap (a - \delta, a + \delta))$

$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ s.t.\ |f(x) - A| < \varepsilon(0 < |x - a| < \delta)$

$\Longleftrightarrow$「$\forall a_n \in E^* \cap, a_n \rightarrow a$（$n \rightarrow \infty$）$\Rightarrow f(a_n) \rightarrow A$（$n \rightarrow \infty$）」

$\Longleftrightarrow f(E^* \cap (a - \delta, a + \delta)) \subset (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

◎ I は区間、f は I 上の実数値関数

f は I 上広義単調増加 $\Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$（$x, y \in I, x \leq y$）

f は I 上広義単調減少 $\Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$（$x, y \in I, x \leq y$）

- （コーシーの収束条件）$a \in \mathbb{R}$、$E \subset \mathbb{R}$、a は E の集積点、$E^* = \{x \in E; x \neq a\}$、$f$ は E 上実数値関数

  $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ s.t.\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon(x, y \in E^* \cap (a - \delta, a + \delta)) \Longleftrightarrow f(x)$ は $x \rightarrow a$ のとき収束

  $\Longleftrightarrow$「$a_n \in E^*, a_n \rightarrow a$（$n \rightarrow \infty$）$\Rightarrow \{f(a_n)\}$ は収束」

また、関数にもはさみうちの定理は存在します。

7　一変数実数値連続関数

関数の連続を定義し、連続関数に成り立つ定理を示します。

$E \subset \mathbb{R}$、$E \neq \phi$、$a \in E$、f は E 上の実数値関数

◎ f は a で連続 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ s.t.\ |f(x) - f(a) < \varepsilon(x \in E, |x - a| < \delta)$

$\Longleftrightarrow \forall a_n \in E$ である数列 $\{a_n\}$ に対し、$a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a)$

$\Longleftrightarrow f(x) \rightarrow f(a)$（$x \rightarrow a$）　（$a$ は E の集積点）

◎ f は E 上連続 $\Longleftrightarrow f$ は E の全ての点で連続

- （最大値・最小値の存在定理）　E は有界閉区間、f は E 上実数値連続関数

  $\Rightarrow f$ は E 上の最小値、最大値を持つ $\Longleftrightarrow f(E)$ の最小元と最大元が存在

- （中間値の定理）　E は区間、f は E 上の実数値連続関数

  $a, b \in \mathbb{R}$、$a < b$、$E = [a, b]$、$f(a)$ と $f(b)$ の間の数αに対して、$f(c)$ となる E の元 c が存在

  $(\Longleftrightarrow \exists c \in [a, b]\ s.t.\ f(c) = \alpha)$

中間値の定理は非常に重要な定理です。

8　単調関数と逆関数

関数における単調増加、減少、さらに単射かつ連続な関数の逆関数は連続である。

◎ E は区間、f は E 上の実数値関数

- f は E 上狭義単調増加 $\Longleftrightarrow f(x) < f(y)$（$x, y \in E$、$x < y$）
- f は E 上狭義単調減少 $\Longleftrightarrow f(x) > f(y)$（$x, y \in E$、$x < y$）

- f が E 上単射かつ連続 $\Rightarrow$ f は E 上狭義単調増加あるいは減少
- f が E 上狭義単調増加 $\Rightarrow$ 逆関数 f^{-1} は $f(E)$ 上連続かつ狭義単調増加
- f が E 上狭義単調減少 $\Rightarrow$ 逆関数 f^{-1} は $f(E)$ 上連続かつ狭義単調減少

逆三角関数については教科書 p.34〜35 を参照してみてください。

9　一変数関数の微分

一変数関数の微分を二通りの方法で定義します。どちらも非常に重要です。

◎ **一次関数で近似する方法**　$E \subset \mathbb{R}$、$a \in E$、f は E 上実数値関数、$A \in \mathbb{R}$
E 上の関数 $R_A(x)$ を、$f(x) = f(a) + A(x-a) + R_A(x)$ で定める
$\dfrac{R_A(x)}{x-a} \to 0$（$x \to a$）が成り立つ実数 A が存在する $\Longleftrightarrow$ f は a で微分可能

◎ **平均変化率の極限による方法**
f は a で微分可能 $\Longleftrightarrow$ $x \to a$ のとき $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ は収束する

このとき、A と $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ の極限値を、f の a における微分係数という

◎ f は E 上微分可能 $\Longleftrightarrow$ f は E の各点で微分可能
$\Longleftrightarrow$ E の全ての点 a で $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が $x \to a$ のとき収束する

- $A \in \mathbb{R}$ に対して $Q_A(x) = \frac{R_A(x)}{x-a}$ $(x \in E$ かつ $x \neq a), 0$ $(x = a)$ と定める。
  E 上で $R_A = Q_A(x-a)$ より、　$\frac{R_A(x)}{x-a} \to 0$（$x \to a$）$\Longleftrightarrow$ 関数 $Q_A(x)$ は a で連続

- f は a で微分可能 $\Longleftrightarrow$ 関数 $Q_A(x)$ が a で連続となる $A \in \mathbb{R}$ が存在

以上より、f が a で微分可能の条件をまとめると、

f は a で微分可能 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to A$（$x \to a$）
$\Longleftrightarrow$ $f(x) = f(a) + A(x-a) + R(x)$、$\dfrac{R(x)}{x-a} \to 0$　を満たす $R(x)$ が存在
$\Longleftrightarrow$ $f(x) = f(a) + A(x-a) + Q(x)(x-a)$、「$Q(a) = 0$、$Q(x)$ は a で連続」を満たす $Q(x)$ が存在

◎ I は区間、f が I 上の実数値関数
f が I 上 n 回微分可能かつ $f^{(n)}$ が I 上連続 $\Longleftrightarrow$ f は I 上 n 回連続微分可能（C^n 級）

- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$、$f, g$ は I 上 C^n 級である実数値関数
  $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$
  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}$　　ただし $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = {}_n\mathrm{C}_k$
  合成関数、逆関数も C^n 級となります（逆関数が C^n 級となるのは f が狭義単調のとき）

10　無限小、無限大、漸近展開

関数の順序（order）に関する定義、定理を示します。漸近展開は後の章で述べます。

$E \subset \mathbb{R}$、$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$、$E$ は a に集積する、f, g, φ は E 上実数値関数。$x \in E$ かつ $x \neq a$ のとき$\varphi(x) \neq 0$

◎ f は a で無限小 $\Longleftrightarrow f(x) \to 0$（$x \to a$）

◎ f は a で正の無限大 $\Longleftrightarrow f(x) \to +\infty$（$x \to a$）

- Landau の記号

  ◎ $f(x) = o(\varphi(x))$（$x \to a$）$\Longleftrightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 0$（$x \to a$）

  ◎ $f(x) = O(\varphi(x))$（$x \to a$）$\Longleftrightarrow |f(x)| \leq c|\varphi(x)|$　（$\exists c > 0$、$\exists \delta > 0$ $s.t.$ $0 < |x-a| < \delta$）

  $\Longleftrightarrow \left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right|$が a の近くで有界

  - $f(x) = g(x) + o(\varphi(x)) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = o(\varphi(x))$
  - $f(x) = g(x) + O(\varphi(x)) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = O(\varphi(x))$

他の性質はプリント p.74(10.5)、p.75(10.7) を見てください。

補足的に (10.5) の説明をすると、$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = o(1)$ というのは、左辺を 1 で割ったとき、$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$が 0 に収束するということなので、要は当たり前です。書き方が分かりづらくされています。1 は定数関数っていうことですね。また $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 0$ のとき、$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$は有界ですので（a の十分近くで）、O(ラージオー) でも表せます。(10.7) は上の定理を使って変形して、1 やら $x-a$ で割ればそれぞれの定義になります。

11　平均値の定理と Taylor の定理

ほぼ間違いなく試験に出るであろうという大事な定理です。極大と極小の定義もありますが、それは限られた範囲でなら最小、最大であり、広義、狭義も前と同じ違いです。

$a, b \in$ 、$a < b$、f, g は区間 $[a, b]$ 上の実数値関数、f, g は $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能、(a, b) 上の各点で $g'(x) \neq 0$

- （Rolle の定理）　$f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$　である $c \in (a, b)$ が存在
- （平均値の定理）　$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$　である $c \in (a, b)$ が存在
- （コーシーの平均値の定理）　$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$　となる $c \in (a, b)$ が存在

$n \in \mathbb{N}$、I は区間、f は I 上実数値関数、f は I 上 $n-1$ 回微分可能、$f^{(n-1)}$は a で微分可能

- （漸近展開）　$f(x) = f(a) + \dfrac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$　（$x \to a$）

◎ （剰余項）　$f(x) = f(a) + \dfrac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x\ a)$

と書いたとき、$R_{n+1}(x\ a)$ を f の a における $n+1$ 次剰余項という

- （Taylor の定理）　$a \neq b$、f は I 上 C^n級、$f^{(n)}$は I 上微分可能

  $R_{n+1}(b\ a) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$が成り立つ a と b の間の数が存在

  $\Longleftrightarrow$　$R_{n+1}(b\ a) = \dfrac{f^{(n+1)}(a + \theta(b-a))}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$、$\theta \in (0, 1)$ となる$\theta \in \mathbb{R}$ が存在

- （Taylor 展開）　I は区間、$a \in I$、f は I 上 C^∞級

  a を中心とする f の Taylor 展開 $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)(x-a)^n$

12　微分法の応用

関数の増減と微分係数の関係についての定理を示します。基本は高校と同じですが、広義、狭義の違いと、n 次同関数における極大、極小について細かく分けられています。

f は I 上連続かつ I 上微分可能、$c \in I$

- f は I 上広義単調増加 $\Longleftrightarrow f'(c) \leq 0$
- f は I 上広義単調減少 $\Longleftrightarrow f'(c) \geq 0$
- $f'(c) > 0 \Rightarrow f$ は I 上狭義単調増加
- $f'(c) < 0 \Rightarrow f$ は I 上狭義単調減少

f は I 上 C^∞ 級、$a \in I$、$f^{(k)}(a) = 0$（$1 \leq k < n$）かつ $f^{(n)}(a) \neq 0$

- n が偶数かつ $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ は a で狭義の極小　（$f(a) < f(x), 0 < |x - a| < \delta$）
- n が偶数かつ $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ は a で狭義の極大　（$f(a) > f(x), 0 < |x - a| < \delta$）
- n が奇数かつ $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ は a の近くで狭義単調増加
- n が奇数かつ $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ は a の近くで狭義単調減少

- （ロピタルの定理）$a, b, A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, -\infty \leq a < b \leq +\infty$
  $I = (a, b)$、f, g は I 上の実数値関数、f, g は I 上微分可能、$g'(x) \neq 0$、$x \in (a, b)$

  ・$f(x) \to 0$、$g(x) \to 0$（$x \to a + 0$）のとき
  $$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \ (x \to a+0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to A \ (x \to a+0)$$
  ・$|g(x)| \to +\infty$（$x \to a + 0$）のとき
  $$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \ (x \to a+0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to A \ (x \to a+0)$$

  ここで、$x \to a + 0$ を $x \to b - 0$ に入れ替えても成り立つ

13　$\mathbb{R}^N$におけるノルムと点集合

$\mathbb{R}^N$とは、N 個の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_N$の組（$x_1, x_2, \cdots, x_N$）全体のなす集合、あるいは N 次元ベクトル（$x_1, x_2, \cdots, x_N$）全体のなす集合（列ベクトルでも表す）のことです

◎（ノルム）　$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$で $\|\boldsymbol{x}\|$ を定義する

◎（開球）　$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$、$r > 0$、集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r|\}$
$\Longleftrightarrow \boldsymbol{a}$を中心とする半径 r の開球（$B_r(\boldsymbol{a})$ $U(\boldsymbol{a}\ r)$）

◎ $\boldsymbol{a}$は E の内点（$E \subset \mathbb{R}^N$）$\Longleftrightarrow$ $B_r(\boldsymbol{a}) \subset E$ が成り立つ正数 r が存在

◎ $\boldsymbol{a}$は E の外点（$E \subset \mathbb{R}^N$）$\Longleftrightarrow$ $B_r(\boldsymbol{a}) \cap E = \phi$が成り立つ正数 r が存在

◎ $\boldsymbol{a}$は E の境界点（$E \subset \mathbb{R}^N$）$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a}$は E の内点でも外点でもない

◎ E は開集合（$E \subset \mathbb{R}^N$）$\Longleftrightarrow$ E の元は全て E の内点

◎ E は閉集合（$E \subset \mathbb{R}^N$）$\Longleftrightarrow$ E の境界点は全て E に属す

◎ E は有界（$E \subset \mathbb{R}^N$）$\Longleftrightarrow$ 正数 r、$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$が存在して $E \subset B_r(\boldsymbol{a})$ が成立

◎ 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、$\mathbb{R}^N$の元$\boldsymbol{a}_n$を定めた列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ は$\boldsymbol{a}$に収束する（$\boldsymbol{a}_n \to \boldsymbol{a}$）

◎ $\|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| \to 0$（$n \to \infty$）$\Longleftrightarrow$ 点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ は$\boldsymbol{a}$に収束する（$\boldsymbol{a}_n \to \boldsymbol{a}$）

- $\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}$の第 i 成分を$\boldsymbol{a}_{ni}, \boldsymbol{a}_i$とする（$1 \leq i \leq N$）
  $\boldsymbol{a}_n \to \boldsymbol{a}$（$n \to \infty$）$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_{ni} \to \boldsymbol{a}_i$（$n \to \infty$）（$1 \leq i \leq N$）
- （コーシーの収束条件）$\forall \varepsilon > 0, \exists L \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m, n \geq L \Rightarrow \|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_n\| < \varepsilon$
  $\Longleftrightarrow \boldsymbol{a}_n \to \boldsymbol{a}$（$n \to \infty$）が成り立つ$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$が存在する

数列をベクトル列にしたものが点列で、収束条件も根本は一致しています。

14　多変数関数の極限と連続性

一変数関数を N 次元ベクトルでの多変数関数として極限、連続を定義します。
$M, N \in \mathbb{N}$、$D \subset \mathbb{R}^N$、$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^M$、$f$ は E を定義域、$\mathbb{R}^M$に値をとる関数

- $\boldsymbol{a}$は E の集積点 $\Longleftrightarrow \forall\delta > 0, \exists\boldsymbol{x} \in E\ s.t.\ 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|\delta$

- $\boldsymbol{a}$は E の孤立点 $\Longleftrightarrow B_r(\boldsymbol{a}) \cap E = \{\boldsymbol{a}\}$ となる正数 r が存在

$\boldsymbol{a}$は E の集積点とする。$E_r^* = \{\boldsymbol{x} \in E\ 0\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|\delta\}$

- $f(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{b}$　（$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$）$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ s.t.\ \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\| < \varepsilon$　（$\boldsymbol{x} \in E_0^*$）（$f(\boldsymbol{x})$ は$\boldsymbol{b}$に収束する）
  $\Longleftrightarrow$「$\forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a}_n \in E, \boldsymbol{a}_n \neq \boldsymbol{a}$、$\forall\{\boldsymbol{a}_n\}, \boldsymbol{a}_n \to \boldsymbol{a}$　（$n \to \infty$）$\Rightarrow f(\boldsymbol{a}_n) \to \boldsymbol{b}$　（$n \to \infty$）」

- f は$\boldsymbol{a}$で連続 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ s.t.\ \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\| < \varepsilon$　（$\boldsymbol{x} \in E$ かつ $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$）
  $\Longleftrightarrow$「$\forall\boldsymbol{a}_n \in E$（$n \in \mathbb{N}$），　$\boldsymbol{a}_n \to \boldsymbol{a}$　（$n \to \infty$）$\Rightarrow f(\boldsymbol{a}_n) \to f(\boldsymbol{a})$　（$n \to \infty$）」

- f_iは f の成分関数　$\Longleftrightarrow$　各$\boldsymbol{x} \in E$ に対して、$f(\boldsymbol{x})$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ と表す　（$1 \leq i \leq M$）

- E は孤状連結　$\Longleftrightarrow$　$\forall\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$,　$\mathbb{R}$ の閉区間 $[\alpha, \beta]$ から $\mathbb{R}^N$への連続写像φ
  $\varphi(\alpha) = \boldsymbol{a}$、$\varphi(\beta) = \boldsymbol{b}$、　$\varphi([\alpha, \beta]) \subset E$

- $\boldsymbol{b}$の第 i 成分を b_iと表す（$1 \leq i \leq M$）
  $f(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{b}$　（$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$）　$\Longleftrightarrow$　$f_i(\boldsymbol{x}) \to b_i$　（$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$）
  f は$\boldsymbol{a}$で連続　$\Longleftrightarrow$　f_iは$\boldsymbol{a}$で連続

- （最小値、最大値の存在）　E : 有界閉集合、　f は E 上連続
  $\Rightarrow f(E)$ は $\mathbb{R}^M$の有界閉集合、　$M = 1$ のとき、$f(E)$ の最小元、最大限が存在

（終わりに）
問題はぜひ解いてください。定理はどこでどう使うのか、その定理で何がわかり、示せるのかを知って試験に臨んでください。31 組で優を独占しましょう。

原稿作成　水谷
TEX 打ち込み　松本