数学１Ａ試験対策練習問題

作・水谷俊介

- 試験時間は90分(だろう)。
- 問題数は多めに出題したのですべて解けなくても満点の可能性がある(かもしれない)。
- 小問4つ以上解ければ可を与える。それ以下でも可のこともある(はずである)。
- 普通の試験より問題多いと思います。本物の試験では、おそらく大問が5問、それぞれに小問が2問ずつくらいで、全部で10問程度だと思われます。
- 高木先生は上から2番目3番目のことを2006年度の冬に書いていました。
- 先に言っておくと、あまりちゃんとしたものを作れませんでした(泣)。
- もう一つ、完全に手抜きの部分が多々あって、試験範囲を網羅できず、またシケプリで問題を出すと予言したところも出せてないと思います。ごめんなさい。

1．数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$を$a_n = \sqrt{n}$によって定義する。この数列は

$$\forall_{\varepsilon>0}、\exists_{N\in\mathbb{N}}、\forall_{n\geq N}、|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

を満たすが、コーシー列ではないことを示せ。

2.（1）$A_n = (a_n, b_n)$とする。点列$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界であることと、二つの実数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$がどちらも有界であることは同値であることを示せ。点列$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界であるとは、任意の正実数Rで任意のnに対して$|A_n| < R$が成り立つものが存在することと定義する。

（2）有界な点列$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束する部分列$\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$を持つことを示せ。

3．以下の極限を計算せよ。

（1）$lim_{x\to 0} \frac{x - tan\,x}{x^3}$　（2）$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{log(1+x)}{x^2})$

（3）$\lim_{x\to +\infty} x\,log\frac{x-a}{x+a}$　（4）$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$

（ヒント）テイラー近似をして計算して下さい。

４．二変数関数$f(x,y)$を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

によって定義する。

（１）$f(x,y)$は$(0,0)$において連続であることを示せ
（２）$f(x,y)$は$(0,0)$においてxでもyでも偏微分可能であることを示せ
（３）$f(x,y)$は$(0,0)$において微分可能ではないことを示せ

５．二変数関数$f(x,y)$を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

によって定義する。この$f(x,y)$は$(0,0)$で xでもyでも偏微分可能だが、$(0,0)$で連続ではないことを示せできないことを示せ

６．次の無限級数が収束するか発散するかを調べよ

（１）$\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)^2}$　（２）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n+1}$

（３）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$　（４）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots5\cdot3\cdot1}{n!}$

７．次の冪級数の収束半径を求めよ

（１）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a^{n^2}x^n\quad(a>0)$　（２）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$　（３）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

８．$\mathbb{R}^2$全体を定義域とする微分可能な二変数関数$f(x,y)$に対し、$\mathbb{R}$全体を定義域とする微分可能な一変数関数$\varphi(u)$で$f(x,y)=\varphi(2x+3y)$となるものが存在するための必要十分条件は

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

が成り立つことであることを示せ

９．任意の正実数 x と a に対して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$$

となることを証明せよ

１０．次の二変数関数の極値（あるいは峠の点（鞍点））を求めよ

$$f(x,y)=x^3+3xy^2-3x$$