数学１Ａ試験対策練習問題＜解答＞

１．まず、任意の正実数εに対して

$$n > N \Longrightarrow |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

を満たすNが存在することを示しましょう。

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

より、任意の正実数εに対して、例えば N を $\frac{1}{\varepsilon^2}$ 以上の自然数とすると、

$$n > N \Longrightarrow |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{N}} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

が成り立ちます。これで示せました。

次にコーシー列でないことを示します。この数列は発散するので、コーシーの判定法の対偶よりコーシー列でないことは示せますが、ここではコーシーの判定法を使わずに証明します。

任意の正実数εに対して

$$m, n \geq N \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

を満たすNが存在する、ことは成り立たないことを示します。示すべきことは任意の正実数εに対して、どんなに大きな自然数Nに対してもNより大きい自然数m, nで$|a_m - a_n| \geq \varepsilon$の成り立つものが存在することです。ここで$m = 2n$とすると

$$\sqrt{m} - \sqrt{n} = \sqrt{2n} - \sqrt{n} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{m}$$

ですので、例えば$\varepsilon = 0.4$などとすると、どのようなNに対してもnをNより大きい自然数とし$n = 2m$とすれば$\sqrt{m} - \sqrt{n} \geq \varepsilon$が成り立ちます。よってコーシー列ではありません。

２．（１）まずは、$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界であることを仮定して、有界を点間の距離を比較することで示していきます。

$$|a_n| = \sqrt{{a_n}^2} \leq \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} = |A_n| < R$$

より数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は有界です。また、数列$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$も同様です。

また、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界であることを仮定します。

$$|A_n|^2 = |\mathrm{a_n}|^2 + |\mathrm{b_n}|^2 < 2\mathrm{R}^2$$

より点列$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$は有界です。

（２）$A_n = (a_n, b_n)$とします。$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界なので$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は有界な実数列です。よってボルツァノーワイヤシュトラースの定理により、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の部分列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$で収束するものが存在します。この自然実数列$\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \cdots$に対して$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$の部分列$\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ができます。これは収束するとは限りませんが、もとの実数列$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界なので、部分列も有界です。よってこれにボルツァノーワイヤシュトラースの定理を適用することで収束する部分列$\{b_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$が得られます。この自然実数列$n_{k_1}, n_{k_2}, \cdots$に対して$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の部分列$\{a_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$は収束する部分列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$の部分列なので収束します（ここは

ボルツァノーワイヤシュトラースの定理ではありません)。以上より$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$の部分列$\left\{A_{n_{k_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$は成分のなす実数列がどちらも収束するので点列として収束します。

３．（１）分母が x^3 なので分子の $tan\,x$ を $x=0$ を中心に３次まで近似しましょう。

$$tan'x = 1 + tan^2x \qquad tan''x = 2tan\ x(1+tan^2x)$$

$$tan'''x = 2\left(1+tan^2x\right)^2 + 4tan^2x(1+tan^2x)$$

なので

$$tanx = x + \frac{x^3}{3} + o(x^5)$$

です。これを代入して

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - tan\,x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - x - \frac{x^3}{3} - o(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3} - \frac{o(x^5)}{x^3}}{1} = -\frac{1}{3}$$

と計算できます。

（２）まず、$log(1+x)$を 2 次近似します。

$$log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

これを代入し、$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$ を使うと

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{log(1+x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{o(x^3)}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

となります。

（３）$y = 1/x$とおくと

$$\lim_{x\to +\infty} x\,log\frac{x-a}{x+a} = \lim_{y\to +0}\frac{1}{y}\log\frac{1-ay}{1+ay} = \lim_{y\to +0}\frac{\log(1-ay) - \log(1+ay)}{y}$$

となります。分子に

$$log(1-ay) = -ay + o(y^2) \qquad log(1+ay) = ay + o(y^2)$$

を代入すると、

$$\lim_{y\to +0}\frac{\log(1-ay) - \log(1+ay)}{y} = \lim_{y\to +0}\left(-a + \frac{o(y^2)}{y} - a - \frac{o(y^2)}{y}\right) = -2a$$

と計算できます（$\frac{o(y)}{y} - \frac{o(y)}{y} = 0$ではありません。$y \to +0$のときどちらも0に収束するということです)。

（４）極限を取る前の式を通分すると

$$\frac{1}{sin^2x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - sin^2x}{x^2 sin^2x}$$

となります。分子と分母の $sinx$ にそれぞれ

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5) \qquad sinx = x + o(x^2)$$

を代入すると

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-sin^2x}{x^2sin^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^5))^2}{x^2(x+o(x^2))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2+\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{36}-xo(x^5)+x^3o(x^5)+o(x^5)^2}{x^4+x^3o(x^2)+x^2o(x^2)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{36}-\frac{o(x^5)}{x^3}+\frac{o(x^5)}{x}+\frac{o(x^{10})}{x^4}}{1+\frac{o(x^2)}{x}+\frac{o(x^4)}{x^2}}=\frac{1}{3}$$

と計算できます。$o(x^n)$は定数倍しても$o(x^n)$であることを使っています。

4．（１）$f(0,0)=0$ ですから、任意の正実数εが与えられたとき、

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta \implies |f(x,y)|<\varepsilon$$

となる δ を見つければいいわけです。いわゆる三角不等式によって

$$|f(x,y)|=\left|\frac{(x-y)^3}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{(|x|+|y|)^3}{x^2+y^2}$$

となります。ここで

$$|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}\qquad |y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

であることを使って、上の不等式に代入すると

$$|f(x,y)|\leq\frac{(2\sqrt{x^2+y^2})^3}{x^2+y^2}=8\sqrt{x^2+y^2}$$

が得られます。このことから、$\delta=\frac{\varepsilon}{8}$ とすれば、$\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ のとき

$$|f(x,y)|\leq 8\sqrt{x^2+y^2}<8\delta=\varepsilon$$

が成り立ちます。これで $(0,0)$ で連続であることが示せました。

（２）二つの偏微分係数 $f_x(0,0),f_y(0,0)$ を計算しましょう。定義式に$f(x,y)$の具体的な式を代入すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}1=1$$

および、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\frac{(-y)^3}{y^2}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1$$

となって、極限値が確定するので、どちらの偏微分も可能です。

（３）もしも$f(x,y)$が$(0,0)$で、微分可能なら、一次近似式$P(x,y)$は

$$P(x,y)=1(x-0)+(-1)(y-0)+f(0,0)=x-y$$

でなければならないことになります。ところが、

$$f(x,y)-P(x,y)=\frac{(x-y)^3}{x^2+y^2}-(x-y)=\frac{(x-y)((x-y)^2-(x^2+y^2))}{x^2+y^2}=\frac{-2xy(x-y)}{x^2+y^2}$$

なので、$y=-x,\ x>0$ という関係を保ったまま $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ とすると、

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x\\ x>0}}\frac{f(x,y)-P(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{4x^3}{2x^2\sqrt{2x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{4x^3}{2\sqrt{2}x^3}=\sqrt{2}$$

となって、0 に収束しません。よって、$f(x,y)$は$(0,0)$で微分できません。二変数関数の場合、すべての近づけ

方で成り立たないと微分可能だなんだといえません。そこで、きれいに計算できそうな特定の近づけ方を選んで計算してみればいいというわけです。

５．まずxでもyでも偏微分可能であることを示しましょう。$f(x,y)$は常にxとyについて対象なので、xで偏微分可能であることを示せば十分です。定義にしたがって計算すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\underset{x\to 0}{lim}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\underset{x\to 0}{lim}\frac{\frac{x\cdot 0}{x^2+0}-0}{x}=\underset{x\to 0}{lim}0=0$$

となって極限値が確定します。よって、xでもyでも偏微分可能で

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

です。次に$(0,0)$で不連続であることを示しましょう。つまり、

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim}f(x,y)=f(0,0)$$

が成り立たないことを示します。ここでも左辺の極限は(x,y)をどのように$(0,0)$に近づけても同じ値に収束しなければならないので、特別な近づけ方で収束しないとか、二つの近づけ方で別の値に収束するということを示せばいいわけです。ここでは後者の方法を使います。

$y=x$という関係を保ったまま $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ とすると、

$$\underset{x\to 0}{lim}f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{xx}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

となります。ところが$y=-x$という関係を保ったまま $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ とすると、

$$\underset{x\to 0}{lim}f(x,-x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(-x)}{x^2+(-x)^2}=-\frac{1}{2}$$

となって 1/2 に収束しません。よって、$f(x,y)$は$(0,0)$で不連続です。

６．（１）$m=n-2$とおくと、

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)^2}=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$$

となります。よって収束します。

（２）ダランベールの判定法を使います。

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}+1}\frac{3^n+1}{2^n+1}=\frac{2+\frac{1}{2^n}}{3+\frac{1}{3^n}}\frac{1+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2^n}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{3}$$

となって 1 より小さい値に収束するので、この無限級数は収束します。

（３）コーシーの判定法を使います。

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}=(1+\frac{1}{n})^n\xrightarrow{n\to\infty}e$$

となって１より大きい値に収束するので、この無限級数は発散します。

（４）ダランベールの判定法を使います。

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(n+1)!}\frac{n!}{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}=\frac{2n+1}{n+1}=\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}2$$

となって１より大きい値に収束するので、この無限級数は発散します。

７．（１）コーシーの求め方を用います。

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0 & a<1\\ 1 & a=1\\ \infty & a>1\end{cases}$$

です。よって収束半径はこの逆数をとって、

$$\infty\ (a<1)、\quad 1\ (a=1)、\quad 0\ (a>1)$$

となります。

（２）xを固定して $a_n=x^{n^2}$ とおき、問題の冪級数を$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$と見てみましょう。この無限級数にコーシーの判定法を使うと

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}|x|^n=\begin{cases}0 & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ \infty & |x|>1\end{cases}$$

となります。これが１より小さいとき絶対収束し、１より大きいとき発散するというのが、コーシーの判定法の結論です。つまり、問題の無限級数は

$|x|<1$ で絶対収束し、$|x|>1$ で発散する

というわけです。したがって、問題の無限級数の収束半径は１です。

（３）ダランベールの判定法を使います。

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2(n+1))!\,(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)}=\frac{1}{4}$$

となるので、収束半径は 4 となります。

８．$2x+3y$ が一つの変数であるような変数変換を施してしまうというのが方針です。例えば、

$$u=2x+3y \qquad v=y \qquad （１）$$

とし、$f(x,y)$をuとvの関数とみなしたものを $\varphi(u,v)$ とします。つまり、

$$f(x,y)=\varphi(2x+3y,y)$$

となる関数をφとするということです。（この$\varphi(u,v)$は、式（１）を逆に解いた

$$x=\frac{u-3v}{2} \qquad y=v$$

を$f(x,y)$に入れたもの

$$\varphi(u,v)=f(\frac{u-3v}{2},v)$$

です。しかし、問題を解くには式（１）を逆に解く必要はありません。「逆に解けるからこのような$\varphi(u,v)$が

存在する」ということだけ確認できればいいです。）

　すると、合成関数の微分公式により、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(2x+3y,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(2x+3y,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(2x+3y,y)\cdot 2+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(2x+3y,y)\cdot 0$$

$$=2\frac{\partial \varphi}{\partial u}(2x+3y,y)$$

および、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(2x+3y,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(2x+3y,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

$$=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(2x+3y,y)\cdot 3+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(2x+3y,y)\cdot 1$$

$$=3\frac{\partial \varphi}{\partial u}(2x+3y,y)+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(2x+3y,y)$$

となります。ということは

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Leftrightarrow 6\frac{\partial \varphi}{\partial u}(2x+3y,y)=6\frac{\partial \varphi}{\partial u}(2x+3y,y)+2\frac{\partial \varphi}{\partial v}(2x+3y,y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)=0$$

となります。最後の式の意味は「$\varphi(u,v)$はvによらない」ということなので、φはuだけの一変数関数です。これで、

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Leftrightarrow f(x,y)=\varphi(2x+3y)$$

が示せました。

９．aより大きな自然数nを一つ決め、e^xを$x=0$においてn次までテイラー展開します。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

となります（ラグランジュ表示を使いました）。$x>0$のとき右辺のすべての項が正ですので、

$$e^x>\frac{x^n}{n!}$$

が成り立ちます。よって、

$$0<\frac{x^a}{e^x}<\frac{x^a}{x^n/n!}=\frac{n!}{x^{n-a}}$$

となります。nはaより大きく選んであるので、$x\to\infty$のとき、$x^{n-a}\to\infty$です。よって、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{x^{n-a}}=0$$

です。よって、はさみうちの原理より示せました。

１０．$f(x,y)$を偏微分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3(x^2+y^2-1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6xy$$

よって $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点(x,y)は

$$(0,1), \quad (0,-1), \quad (1,0), \quad (-1,0)$$

の四点です。また、極大極小を判定するために２階微分を計算します。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6x$$

となります。判定法から、$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$、$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$、$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$とおいて、$A$と$B^2-AC$の正負を調べます。

$(0,1)$のとき、$\mathrm{A}=0$、$\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}=36>0$より、峠の点となります。ちなみに$f(0,1)=0$です。

$(0,-1)$のとき、$\mathrm{A}=0$、$\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}=36>0$より、峠の点となります。ちなみに$f(0,-1)=0$です。

$(1,0)$のとき、$\mathrm{A}=6>0$、$\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}=-36<0$より、極小となります。ちなみに$f(1,0)=-2$です。

$(-1,0)$のとき、$\mathrm{A}=-6>0$、$\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}=-36<0$より、極大となります。ちなみに$f(-1,0)=2$です。

２次近似を使った解法もありますが、こっちの解法で十分だと思います。

（注）シケプリの交項級数のところの証明は載せません。理由は面倒だからです。誰のせいでもありません。