数学１A試験対策プリント

基本的には教科書とノートとプリントに準拠して書きます。だいたいのことは教科書に載っているので、それを参照してください。あと、演習でも同じことをやっている部分があるので、その箇所に関しては少し割愛します。というか一切演習で配られたプリントを参考にしていませんので気を付けてください。また、このプリントをもとに、時間の許す限り簡単な練習問題を出そうと思っています。某演習の先生とは違い、解答もちゃんと載せるので安心してください。

目次　　　　ページ番号

1　極限と連続関数

1.1　実数の構成

授業では、カントールの構成法について説明されました。整数と有理数の性質を既知として、有理数列の極限を用いて実数を作ります。例えば、$\sqrt{2}$は$a_0 = 1, a_1 = 1.4, a_2 = 1.41,\ a_3 = 1.414$, ･･･という有理数列の極限で表せます。ここで問題となるのが「収束とはなんぞや」ということなので、収束を定義します。これは「1．実数の構成」というプリントに詳しく書いてあるのでそれを見てください。また重要なのがコーシー列で、難しいことは何もなく、「数列がコーシー列である」ことと、「数列が収束する」こととは同値です。プリントにはさらに詳しく書いてあるので、よく読んでおいてください。と言いつつも、実数の構成に関しては、参考程度でいいらしいので、あまり深入りしないように。

1.2　数の基本性質と数列の極限（教科書ｐ２～ｐ１３）

教科書に証明付きで様々な定理が書いてあるのでそれを読んでください。以下では、のちのち重要になってくるであろう定理を紹介します。

1.2.1 ワイヤシュトラースの定理（p6）

これは、上限（あるいは下限）の存在定理ともいえます。上限においての証明は、上界である数(a)と、上界でない数(b)を一つずつとり、$c = \frac{a+b}{2}$として、cが上界であるときはaと入れ替え、上界でないときはbと入れ替えるという操作を繰り返します。情報でいうアルゴニズムの二分法と同じ要領です。そのaとbの極限値が上限となります。下限についても同様です。

1.2.2 ボルツァノーワイヤシュトラースの定理（p11、p139）

教科書には「有界な無限集合の互いに異なる点からなる数列で収束するものが存在する」とややこしく書いてありますが、実際には、「有界な実数列は収束する部分列を持つ」と考えてください。この定理は後で書く、連続関数についてのところでも登場するとても重要な定理です。ちなみに、この定理は$\mathbb{R}^n$で成り立ち、そのときは、「有界閉集合の任意の点列は収束する部分列を含み、その極限点は集合に含まれる」となります。

1.2.3 コーシーの収束条件（p12）

これは、数列$\{a_n\}$が収束するための必要十分条件を表しています。論理記号を用いて書くと

$$\forall_{\varepsilon>0}、\exists_{N\in\mathbb{N}}、\forall_{n,m\geq N}、|a_n - a_m| < \varepsilon$$

となります。1.1で見た収束の定義では、定義自体に収束値が入っているため、定義を用いて収束を示すには極限値を見つけなければなりませんが、コーシーの収束条件では極限値を知らずとも、収束を証明できます。これはとても大きな利点です。

1.3　関数の極限と連続関数（ｐ１４～ｐ３７、ｐ１３６～ｐ１４１）

一変数関数も、多変数関数も似たり寄ったりな部分が多いので、並行して解説したいと思います。多変数関数といえども、おもに二変数関数を説明します。

1.3.1 関数の収束の定義（p15、p137）

・一変数関数

$f(x)$を、xを変数とする関数とします。このとき、$x \longrightarrow a$のとき$f(x) \longrightarrow A$であることを、

$$\forall_{\varepsilon>0}、\exists_{\delta>0}、0 < |x-a| < \delta、|f(x) - A| < \varepsilon$$

と表します。これが世に言うε- δ論法というやつです。コーシーの収束条件も同様にして関数バージョンを表せます。ちなみにAは必ずしも$f(a)$とは限りません。x＝aで関数はどっかに吹っ飛んでいるかもしれませんが、そんなことはおかまいなしに、

ある定数Aに近づくというだけです。また、aが定義域に含まれている必要もありません。aの十分近くで関数$f(x)$が定義されていれば問題ありません。演習でいう集積点というやつですね。

・二変数関数

まず、二変数関数とは、二つの実数を決めるごとに実数が一つ決まる、という対応のことです。平面の点に対して、実数を一つ対応させます。$z=f(x,y)$とよく書きます。一変数関数では2次元（平面）上のグラフを描きますが、二変数関数では3次元（空間）上のグラフを描きます。x、yはそれぞれ独立に動きます。多変数関数となると、$z=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$と表せます。この場合ではn変数関数です。n個の変数に対して、ひとつ実数が決まるという対応です。これは$n+1$次元上のグラフとなります。nによっては懐かしのOn Campusでやった双曲空間（4次元）よりもはるかにどっか行っちゃうようなグラフになります。これをイメージできる人は異次元から来た使者ということになってしまいます。前置きはこの程度にしておいて、二変数関数の収束の定義を考えます。

一変数関数の場合、xが直線上の1点に近づくときに、$f(x)$がある値に近づくことを収束としました。これから、二変数関数の場合を単純に考えると、点(x,y)が平面上のある1点に近づくときに、$f(x)$がある値に収束するとして問題なさそうです。そこで、点$X(x,y)$が点$P(a,b)$に近づくということは、その点間の距離が短くなるということなので、次のように定義できます。

$$\forall_{\varepsilon>0}、\exists_{\delta>0}、0<|X-P|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta、|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

つまり、直線における距離を平面における距離に書き換えただけですね。あれこれ言っても、定義はほぼ一緒です。文を書きすぎたのでかえって複雑に見えるかもしれません。ごめんなさい。もう一つだけ言っておくと、下の定理からもわかりますが、点の近づき方は任意です。直線のときとは違って、平面上のどのような近づき方でも収束しなければなりません。つまり一変数関数のとき以上のかなり強い条件を満たさなければなりません。例えば、極座標表示にして、動径rをゼロにしたときに偏角θが残っていると、近づき方によって極限値が異なってしまうので、収束するとは言えません。

1.3.2 定理1．14（p20）

・一変数関数

xがaに近づくとき、$f(x)$がAに近づくことを定義しましたが、ここで思うことは、xのaへの近づき方で$f(x)$の収束値が変わるのかということです（右極限、左極限で違うことがあるので、ここではどちらか一方のみに関して話を続けます）。関数では変数xは実数を自由に動けます（定義域によって変わりますが）。すると、例えばxを5に近づけるといっても様々な近づけ方があります。それは、同じ値に収束する数列がいくつもあることと似ています。私たちとしては、そんな近づけ方の違いなどを考えたくはありませんね。そこで、そんな想いに駆られたであろう誰かが証明してくれた定理があります。名前はないんでしょうかね。

xがaに近づいたときに関数$f(x)$がAに近づくための必要十分条件を以下のように表します。

$$x_n\longrightarrow a(n\to\infty)（ただし x_n\neq a）となる任意の数列\{x_n\}に対して、f(x_n)\longrightarrow A(n\to\infty)$$

これにより、問題となるのはxがどのように a に近づくかではなく、xが何に近づくかということになります。

・二変数関数

「定義域内の数列$\{x_n\}$がaに収束するとき$\{f(x_n)\}$がAに収束する」 ということを 「定義域内の点列$\{X_n\},X_n=(x_n,y_n)$が$P=(a,b)$に収束するとき、$\{f(x_n,y_n)\}$がAに収束する」 と言い換えれば、まったく同様に議論が進められます。よって、点Xが点Pに近づいたときに関数$f(x)$がAに近づくための必要十分条件は

$$X_n\longrightarrow P(n\to\infty)\big(ただし X_n\neq P\big)となる任意の点列\{X_n\}に対して、f(x_n,y_n)\longrightarrow A(n\to\infty)$$

となります。

1.3.3 区間と集合

・開区間、開集合

簡単にいうと、端を含まない区間のことです。 例：$\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$、$\{x \in \mathbb{R} | a < x\}$、$\{x \in \mathbb{R} | x < b\}$
性質としては、開区間に含まれる任意の点tに対して、あるδが存在し開区間$(t-\delta, t+\delta)$がもとの開区間に含まれるということがあります。1次元の場合だけでなく、2、3、・・・とより大きい次元でも成り立ちます。
2次元のときでは、円周を含まない円、3次元のときでは、表面を含まない球となります。

・閉区間、閉集合

開区間とは逆の、端を含む区間のことです。 例：$\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$、$\{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$、$\{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$
性質としては端の点について、開区間の性質が成り立ちません。2次元の場合では、境界を含む円、3次元の場合では、表面を含む球となります。

1.3.4 連続関数の定義（p25、p138）

・一変数関数

まずは、連続を定義するために、関数の収束の定義から出発します。連続という言葉からして、xがaに限りなく近づけば$f(x)$も$f(a)$に近づくことを表していそうです。つまり、関数$f(x)$が$x=a$で連続であるということは、「関数$f(x)$の$x \longrightarrow a$としたときの極限値」と「$f(a)$」が一致する というように言いかえられます。そこで、以下のように連続の定義をします。

関数$f(x)$が$x=a$で連続とは、$f(x)$がaの周りのすべての点で定義され、

$$f(x) \longrightarrow f(a) \quad (x \longrightarrow a)$$

をみたすことです。つまり、収束の定義において、$A=f(a)$となればよいということです。また、定理 1.14 から、aを極限値とする任意の数列$\{x_n\}$に対して、$f(x_n) \longrightarrow f(a) (n \to \infty)$といえます。

以上が$x=a$で連続であることの定義ですが、$f(x)$が連続関数であることの定義は以下のようになります。

定義域内のすべてのaにおいて、$f(x) \longrightarrow f(a) \ \ (x \longrightarrow a)$

が成り立つことです。このとき、aは定義域内に含まれてないといけません。このことが収束の定義とはちょっと違いますが、難しいことではないと思います。

・二変数関数

今までの収束の話から、二変数関数の連続の定義は察しがつくと思われます。

関数$f(x,y)$が$(x,y)=(a,b)$で連続とは、

$$\forall_{\varepsilon>0}、\exists_{\delta>0}、0 < |X-P| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta、|f(x,y)-f(a,b)| < \varepsilon$$

が成り立つことです。このε-δ論法だと、長いし、ややこしいので、高校的に書いてみるとこんな感じです。

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

とてもわかりやすいですが、試験では使えない気がします。ここでも(a,b)は定義域内に属していなければなりません。

また、$f(x,y)$が連続関数であることの定義は、定義域内のすべての(a,b)において、

$$\forall_{\varepsilon>0}、\exists_{\delta>0}、0 < |X-P| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta、|f(x,y)-f(a,b)| < \varepsilon$$

が成り立つこととなります。

ここで、実際にどのような連続である関数、また連続でない関数が存在するかを具体的に考えてみると、一変数関数のときより、イメージしづらいことがわかります。その理由は、$x \to a$という近づけ方が「aより大きいほうから近づける」やり方と「aより小さいほうから近づける」やり方の本質的に二種類しかないのに対して、$(x,y) \to (a,b)$には「まっすぐ近づける」、「ジグザグに近づける」、「渦を巻いて近づける」など、近づけ方が本当に多種多様です。一変数関数では、$\lim$によるxがaに近づけば$f(x)$が$f(a)$に近づくというイメージと、ε-δ論法によるxがaに近いなら$f(x)$も$f(a)$に近いというイメージはほぼ一致しますが、二変数関数ではこの二つのイメージに大きな溝が生まれる感覚になります。なので、二変数関数では、$\lim$によるイメージ的な収束の定義ではなく、ε-δ論法による定義にもとづいて考えることがとても重要となります。このことについては問題を出すので、よく考えながら問題を解いてみてください。

1.3.5 最大値、最小値の存在定理(p30、p141)

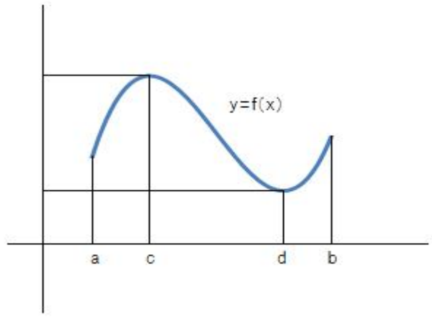
・一変数関数

閉区間$[a,b]$上の連続関数$f(x)$は最大値と最小値をもつという、直観的にもわかりやすい定理です。式を使ってかくと、

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c)$$

となる点c,dがa $< c,d < b$を満たして存在するという感じです。

この定理を使うのに必要な条件は、考える区間が「閉区間」であることと、「連続関数」であることです。そしてこの定理の証明にボルツァノーワイヤシュトラースの定理を使います。



・二変数関数

とりあえず、定理を書き表してみます。 Dを有界閉集合とします。Dを定義域とする連続関数は最大値と最小値を持ちます。つまり、D内の点(a,b)と(c,d)で、任意の $(x,y) \in D$ に対して、

$$f(a,b) \leq f(x,y) \leq f(c,d)$$

の成り立つものが存在する、となります。

とてもイメージしづらいです。ノートとか紙とかを適当に折り曲げて考えてみると少しは分かるかもしれません。紙はサイズが決まっているので、有界閉集合とみなせます。これまた閉集合でなければいけません。これは一変数関数と一緒です。

1.3.6 中間値の定理(p31、p141)

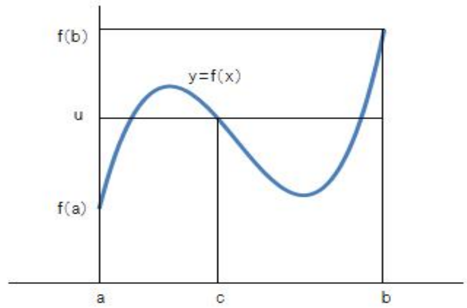
・一変数関数

$f(x)$が閉区間$[a,b]$ を定義域に含む連続関数のとき、$f(a)$ と$f(b)$ の間の任意の実数 u に対して、

$$f(c) = u \text{、} \quad a < c < b$$

を満たすcが存在するというものです。

グラフで言うと、$y = u$という横線は、a $< x < b$の範囲で必ず$f(x)$のグラフと交わるということです。これまた直観的に非常にわかりやすい定理です。これは、実数の連続性をもとに証明しています。



・二変数関数

これは定理を言葉で書くだけにします。

$f(x,y)$を有界閉領域 D 上の連続関数とします。P, QをDの2点で、$f(P) < f(Q)$となるものとします。このとき$f(P) < u < f(Q)$となる任意の数uに対し、$f(R) = u$となるDの点Rが存在します。

ここまで見ても、一変数関数も二変数関数も定理の内容に関しては大きな違いはないことが分かります。

2　関数の微分

2.1　ランダウの記号

演習でやりましたね。関数のオーダーの違いを、大雑把に二つに分けています。

・同位の無限小

$x \longrightarrow a$のとき、$f(x) \longrightarrow 0$かつ$g(x) \longrightarrow 0$であって、さらに

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$$

が有界ならば$f(x)$は$g(x)$と同位の無限小であると言い、

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \quad (x \longrightarrow a)$$

と表します。二変数関数でも定義は同様です。無限小というのは$f(x)$、$g(x)$が0に収束しているからです。

・高位の無限小

$x \longrightarrow a$のとき、$f(x) \longrightarrow 0$かつ$g(x) \longrightarrow 0$であって、さらに

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0$$

ならば、$f(x)$は$g(x)$より高位の無限小であるといい、

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \quad (x \longrightarrow a)$$

と表します。感覚的に言うと、$f(x)$のほうが$g(x)$よりも速く0に収束するという感じです。

これらの記号はテイラーの定理などでの誤差を表すのに用いられています。

2.2　一変数関数の微分・二変数関数の偏微分（ｐ40～ｐ53、ｐ57,58、ｐ142～ｐ148）

2.2.1 <u>微分可能</u>(p41)

関数$f(x)$が$x = a$で微分可能であるとは、極限$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$が存在することです。この極限値がその点における接線の傾きとなります。これらのことはもうみなさん知っているはずなのでこれ以上書きません。というか書けません。次で、二変数関数の微分について導入します。

2.2.2 <u>偏微分</u>(p142)

まず、二変数関数における「微分」とは何かを考えてみます。そもそも二変数関数とは、平面の点にある一つの値をそれぞれ対応させるものだと考えました。そこで、一変数関数では$y = f(x)$のグラフの点$(a, f(a))$での接線の傾きが微分の値ということから、二変数関数では$z = f(x, y)$のグラフの点$(a, b, f(a, b))$における接平面を確定してくれる何かを$f(x, y)$の微分と考えるのが妥当のような気がしませんか。二変数関数の極限において近づけ方は無数にあり、どんな近づけ方に対しても同じ極限値が存在しなければ極限値があるとは言えないと書きましたが、そのすべての近づけ方に接線が存在し、その接線が集まって平面を作るとも考えられます。

では、平面の式とはどんなものなのでしょうか。まず平面上の直線について考えてみましょう。xy平面において傾きをp、切片をcとして、$y = px + c$と書けます。これを移項して整理すると、$px + (-1)(y - c) = 0$となります。これはベクトルの内積っぽく見えませんか。もっと分かりやすく言うとベクトル$(x, y - c)$が定ベクトル$(p, -1)$と直交する点(x, y)の全体が直線となることが分かります。つまり直線 $y = px + c$ は点$(0, c)$を通り$(p, -1)$を法線ベクトルとする直線となります。ベクトルの演算は$\mathbb{R}^n$で成り立つことは線形代数学でやりました。よって、これをそのまま3次元に拡張すれば平面の式が求められそうです。つまり、xyz空間の平面とは通る点(a, b, c)と法線ベクトル(p, q, r)をもとにして、 $(x - a, y - b, z - c)$と(p, q, r)の内積がゼロ、すなわち、

$$p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)=0$$

と表せます。これで、空間内のすべての平面を表せます。僕たちが考えているのは、接平面であるので、上の式に何らかの条件を加えて接平面を求めなければなりません（ここでの条件とは、必要十分条件ではなく、こうあってほしいという要請だと思ってください）。ここで、また一変数関数に立ち戻ってみましょう。例えば、$y^2=x(\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{x})$というグラフでの、$x=0$における接線は、$y$軸が接線（$x=0$という直線）だと思えますが、これはグラフの接線としては存在しません。なぜなら傾きが∞となっていて、$y=g(x)$というグラフとして書き表せないからです。このことから、接平面での条件としては、z軸と平行にならないということが考えられます。すなわち、法線ベクトルで $\mathrm{r}\neq 0$ が要請されるということです。よって、上の式をzについて解いてみると、

$$z=-\frac{p}{r}(x-a)-\frac{q}{r}(y-b)+c$$

となります。$p,q,r(\neq 0)$は任意なので、$-\frac{p}{r}$と$-\frac{q}{r}$を再びp,qとおき、またこれが$z=f(x,y)$のグラフの点$\bigl(a,b,f(a,b)\bigr)$における接平面だとすると、$(x,y)=(a,b)$のとき、$z=f(a,b)$となるので、$c=f(a,b)$です。

以上より、$z=f(x,y)$の点$\bigl(a,b,f(a,b)\bigr)$における接平面をグラフとして与える式は

$$z=g(x,y)=p(x-a)+q(y-b)+f(a,b)$$

という一次式の形でなければならないということが分かります。一変数関数のときのように、ここでのp,qが二変数関数での微分の値になると考えられます。しかし変数が二つあるので、xで微分するといってもyも勝手に変化できるために、どう微分すればいいのか分からなくなります。そこでxで微分するというときに、yをある値bで固定して$z=f(x,b)$とすると、これはxだけの式になるため、xで微分することができます。このように片方の変数を固定して、他方の変数で微分する方法を偏微分といいます。その定義（書き方）は下のようになります。

$y=b$とおいたxの関数$z=f(x,b)$が$x=a$で微分可能であるとき、$f(x,y)$は点(a,b)で偏微分可能であるといいます。そのときの値をxに関する偏微分係数といい、$f_x(a,b)$　または　$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$　などと書きます。yに関しての偏微分でも、xをある値で固定することにより同様にでき、上の表記の添え字などがyに変わります。

・偏導関数

これは何ら難しいことはないのでさっさと終わらせます。関数$z=f(x,y)$が各点でxに関して偏微分可能なとき、偏微分係数を新しい関数と考え、$f_x(x,y)$　または　$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$などで表す。これを偏導関数といいます。$y$に関する偏導関数も同様に表します。偏導関数を求めることを偏微分するといいます。

・高次の偏導関数

偏導関数$f_x(x,y)$が各点xに関して偏微分可能なとき、$f_{xx}(x,y)$を2次の偏導関数といい、また、各点yに関して偏微分可能なときも同様に$f_{xy}(x,y)$を2次の偏導関数といい、添え字をつけて表します。

2.2.3 定理2．1（全）微分可能であるための必要十分条件(p42、p145)

・一変数関数

ランダウの記号を用いて書きます。$x=a$で微分可能であるということは、接線の傾きが求められるということなので、その接線の方程式が書ければよいということになります。

$$f(x)=f(a)+(x-a)A+o(x-a)$$

ここで、Aはある定数です。この式で書けるとき、$f(a)$を移項して両辺$(x-a)$で割ると、A に収束することが分かります。よって$A=f'(a)$です。

これは俗にいう1次近似式というやつですね。テイラーの定理をやるとわかります。下手したらこの式も無限個の項を持つことになるんですかね。この式は、点P$(a,f(a))$を通ることは分かっているので、$x=a$では（（左辺）＝）$f(a)=f(a)$（＝（右辺））となっています。ここで注意したいのは、$o(x-a)$は記号であって、関数とは違うような気がします。とはいっても、

高位の無限小を表していて、xがaに近づくと、ゼロに収束する関数とも考えられるし、それで問題ないと思います。ただ特定の関数は表してはいません。点P近くにおける、接線の誤差項を表しています。

また、教科書では、$o(x-a)$の代わりに$(x-a)B(x)$と表していますが、ここで$B(x)$を

$$B(x)=\begin{cases} \dfrac{o(x-a)}{x-a} & : x \neq a \\ 0 & : x=a \end{cases}$$

と表すと、教科書の定義と一致することになります。

・二変数関数

偏微分は、x, yを固定しているので、少し特殊な微分の値のように感じます。これらの偏微分の値から、$z=f(x,y)$の点(a,b)における微分の値を出したい、つまり一変数の微分と対応する二変数の微分がしたいので、全微分というのを考えます。その定義は下のようになります。

$z=f(x,y)$が点(a,b)で全微分可能とは、定数 A, B を用いて

$$f(x,y)=\underline{f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)}+o\left(\rho(x,y)\right) \quad \rho(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

と書けることです。下線部は$(a,b,f(a,b))$を通る平面の式ですね。そしてこの定義から、$A=f_x(a,b)$、$B=f_y(a,b)$がすぐに導けます。それはおそらくノートに書いてあると思うのでそれを見てください。よって、上で書いた接平面を与える式の定数部分p, qが何かも分かり、やはり微分の値であるということになります。

2.2.4 C^k級関数(p57)

これは定義だけ書きます。一変数関数も二変数関数も一緒です。

導関数、あるいはすべての偏導関数が連続である関数をC^1級関数といいます。また、逆にC^1級関数は微分可能です。

１以上のnに対して、n回微分可能で、$f^{(n)}(x)$が連続である関数$f(x)$をC^n級関数といい、C^0級関数は連続関数のことを指します。

2.2.5 定理4．6(p144)

$f(x,y)$がC^2級関数ならば、$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$が成り立ちます。証明には平均値の定理を使っています。二変数関数の話ですが、うまいこと一変数関数として平均値を使っています。偏微分には順序があります。それは偏微分する際に注目するべき変数が2つあるからです。一変数関数だとそんなことは気にしませんし、できませんが、二変数関数ではこれも一つの性質となっています。この定理の対偶とかもしかしたら使えるかもしれません。

2.2.6 定理4．8(p147)

C^1級関数$f(x,y)$は各点で全微分可能です。これまた平均値の定理を使い、偏導関数の連続性を言い、全微分可能の定義に持っていきます。これはそんなに理解しづらくはないと思います。

（おまけ） 全微分可能・偏微分可能・連続の関係

① 全微分可能ならば偏微分可能である。

② 全微分可能ならば連続である。

③ 連続ならば全微分可能とは言えない。

④ 連続ならば偏微分可能とは言えない。

⑤ 偏微分可能ならば全微分可能とは言えない。

⑥ 偏微分可能ならば連続とは言えない。

これに関しても、この6つの例に関する関数を問題で出せたら（正確には覚えていたら）出します。

2.3 平均値の定理（ｐ５４～Ｐ５６、ｐ１５３、ｐ１５４）

2.3.1 ロルの定理(p54)

関数$f(x)$が$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能で$f(a)=f(b)$を満たすならば、$f'(c)=0$となる$c\ (a<c<b)$が存在する、という定理です。図を見れば明らかですね。これも最大値、最小値の存在定理を用いて証明しています。この定理では暗に区間の最大値、最小値(正確には極値ですが)で微分係数がゼロになると言っています。この定理はとても特殊な場合の定理で、これを一般に広めたものが次の平均値の定理です。

2.3.2 平均値の定理(p55、p153)

・一変数関数

関数$y=f(x)$が$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となる点$c\,(a<c<b)$が存在する、という定理です。これもグラフで見れば直観的にわかります。証明は、うまい具合に新しい関数を作り、ロルの定理を適用します。この定理はのちにコーシーの平均値の定理に拡張(?)されます。ですが、コーシーの平均値の定理と、ロピタルの定理は範囲外です。

・二変数関数

$f(x,y)$をC^1級関数とし、(a,b)をその定義域の一点とします。このとき、$\exists_\theta(0<\theta<1)$があって、次式が成り立ちます。

$$f(a+s,b+t)-f(a,b)=sf_x(a+\theta s,b+\theta t)+tf_y(a+\theta s,b+\theta t)$$

f_x、f_yはそれぞれ偏導関数で、s,tはある定数です。これは試験に出ないと思います。たぶん・・・。出たら先生の責任ということで。

2.3.3 定理2.9、定理4.14(p56、p154)

・一変数関数

これは関数$y=f(x)$が$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能とするとき、$f'(x)$が(a,b)で恒等的にゼロならば、$f(x)$は定数関数であることを表しています。平均値の定理からすぐに証明できることはわかりますね。これはそれほど重要な定理ではないように思われます。

・二変数関数

領域D上のC^1級関数$f(x,y)$が恒等的に$f_x=0$、$f_y=0$をみたすならば、$f(x,y)$は定数です。これも平均値の定理から、暗算でも導けます。

2.4 連鎖律(p149)

2.4.1 連鎖律(p149)

ものすごくかいつまんで言うと、多変数関数における合成関数の偏微分公式です。

線形写像や、表現行列については、数学Ⅱに委ねます。ここでは定義だけ書きます。

$F:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^l$を写像とします。

Fが線形 $\Longrightarrow$ ある行列$A\in M_{l.m}(\mathbb{R})$を用いて、$F(\boldsymbol{x})=A\cdot\boldsymbol{x}$と書ける。この$A$を$F$の表現行列という。

・線形写像の合成と行列の積

$$F\circ G(\boldsymbol{x})=(A\cdot B)\cdot\boldsymbol{x}\quad \text{ただし}B\text{は}G\text{の表現行列}$$

これ以上細かいことは書きません。$\boldsymbol{x}$はベクトルです。行・列の数のような細かいことは書けません。そこは数学Ⅱに任せましょう。

本題に入ります。

まずはイメージ作りのために一変数関数の合成を考えましょう。関数$y=f(x)$があり、その変数xが$x=g(t)$と書けるとき、

$y(t) = f\big(g(t)\big) = f \circ g(t)$とまとめることができます。これが合成関数です。つまり、ある値tを入れると、gという写像によって、xという値が出てきて、そのxがfによって、yという値に変えられて、出てくるということです。この時の合成関数の微分公式は、$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t)$となります。高校レベルでした。

・一変数関数と二変数関数の合成

関数$y = f(x)$があって、そのxが$x = g(s,t)$という関数で表せるとすると、$y(s,t) = f\big(g(s,t)\big) = f \circ g(s,t)$が合成関数となります。二変数関数は二つの変数で一つの実数が決まるので、こう書けます。情報でいう2入力1出力みたいな感じですね。思い出したくないですけど。これの微分公式は偏微分をするため、少しややこしいですが、次のようになります。

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial s}(s,t) = \frac{df}{dx}(g(s,t))\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) \qquad \frac{\partial (f \circ g)}{\partial t}(s,t) = \frac{df}{dx}(g(s,t))\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)$$

基本は一変数の合成と同じです。二変数のうちの片方を固定しての微分が、一変数の合成と同じことになっています。つまり、合成関数の微分公式では、中に入るほうの関数が一変数だろうと、多変数だろうと、公式は偏微分となるために数は増えますが、他に変わりはありません。

・二変数関数と一変数関数の合成

関数$z = f(x,y)$に対し、$x = g(s)$、$y = h(s)$があると、合成は、$z(s) = f\big(g(s),h(s)\big)$となり、その微分公式は、

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(g(s),h(s)\big)\frac{dg}{ds}(s) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g(s),h(s)\big)\frac{dh}{ds}(s)$$

簡略化すると、 $$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

となります。ここでは、xもyもsに依存していることから、sで微分するだけでもxによる偏微分の項とyに偏微分の項の両方が出てきてしまいます。この式の両辺にdsをかけると(形式的に)、熱力でよく出てくる全微分の形になります。

・二変数関数と二変数関数の合成

もう書くのも大変ですがいきます。関数$z = f(x,y)$に対し、$x = g(s,t)$、$y = h(s,t)$が成り立つとき、合成は、$z(s,t) = f\big(g(s,t),h(s,t)\big)$となり、その微分公式は次のようになります。

$$\frac{\partial z}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(s,t),h(s,t))\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s,t),h(s,t))\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(s,t),h(s,t))\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s,t),h(s,t))\frac{\partial h}{\partial t}(s,t)$$

簡略化して、 $$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

ということです。これは教科書に証明付きで書いてあるので、読んでみてください。簡略化バージョンのほうが覚えやすいし、簡潔になっている分、わかりやすいかもしれないので、こっちでこの先書いていきます。

2.4.2 ヤコビ行列(p151)

上の合成微分公式は、行列の積で書けそうです。二変数と二変数の合成のときだけ書いてみると、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

となります。教科書に準拠して書きました。なぜかっこの形が四角いのでしょうか。これからは、この行列の、特に右端の行列に関して一般化していきます。その先に誕生するのが一般ヤコビ行列です。

$\mathbb{R}^n$(の領域D)の点を、$\mathbb{R}^m$の点に対応させる写像をFとします。つまり、

$F:\big(x_1,x_2,\cdots,x_n\big) \mapsto \big(f_1\big(x_1,x_2,\cdots,x_n\big),\cdots,f_m\big(x_1,x_2,\cdots,x_n\big)\big)$ という写像を考えます。要は、Fはn個の変数に対し

て、m個の値を返す関数を表し、$f_1, \cdots, f_m$はn個の変数に対し、一つの値を返す関数ということです。例えば、n=1、m＝2とすると、$F:(t) \mapsto (f_1(t), f_2(t))$であり、パラメータ表示になります。言ってしまうと合成です。$x = f_1(t), y = f_2(t)$と書くとわかりやすいかもしれません。これからは、点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ではなく、ベクトル$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$を考え、写像も、ベクトル$\boldsymbol{x}$をベクトル$F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$に対応させていると考えます。この写像においてのヤコビ行列を考えたいので、この写像Fがベクトル$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$で微分可能であるとはどういうことかを考えないといけません。Fの作り方から、$f_1, f_2, \cdots, f_m$のすべてが$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$で微分可能であれば、$F$はベクトル$\boldsymbol{a}$で微分可能がいえることは分かると思います。ここで、$f_i(1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{m})$の微分可能の必要十分条件は、2.2.3 から想像すると、A,B,･･･N を定数として、

$$f_i = f(\boldsymbol{a}) + A(x_1 - a_1) + B(x_2 - a_2) + \cdots + N(x_n - a_n) + o_i(\rho(\boldsymbol{x}))$$

$(\rho(\boldsymbol{x}) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots (x_n - a_n)^2})$ で書けそうです。もう少しまとめると、

$$f_i(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(x_j - a_j) + o_i(\rho(\boldsymbol{x}))$$

L_{ij}は定数で、また、これまでの感じから$L_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$が成り立つことが証明されそうです。ということで、$L_{ij}$を$m$行$n$列の行列で書きます。その行列を$J_f(\boldsymbol{a})$とおくと下のようになります。

$$J_F(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

これから、微分可能の条件を改めて書きなおすと、

$$F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = F(\boldsymbol{a}) + J_F(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{o}(\rho(\boldsymbol{x})) \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{o}(\rho(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} o_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ o_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

ということで、$J_F(\boldsymbol{a})$のことを写像Fの（$\boldsymbol{a}$における）ヤコビ行列といいます。Fの偏微分係数を並べてできる行列であり、一次近似を表しているものです。ちなみに、ヤコビ行列の行列式をヤコビアンといい、関数fの変数変換による面積や体積などの、変化の比率を符号付きで表すものらしいです。

2.4.3 <u>連鎖律 Part2</u>（p152）

ヤコビ行列の連鎖律です。今気づいたんですが、ここはそんなに試験に出なそうな感じです。むしろ、二変数関数での合成の微分の、具体的な計算のほうが重要そうです。でも一応書きます。

$F: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$、$G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ をそれぞれ微分可能な写像とすると、合成$F \circ G$も微分可能であり、またベクトル$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$を取り、$\boldsymbol{b} = G(\boldsymbol{a})$とおきます。また、$F$、$G$、合成$F \circ G$のヤコビ行列を$J_F$、$J_G$、$J_{F\circ G}$とします。そのとき、

$$J_{F\circ G}(\boldsymbol{a}) = J_F(\boldsymbol{b}) \cdot J_G(\boldsymbol{a}) \qquad \text{簡略化すると、} \quad \mathrm{J_{F\circ G} = J_F J_G}$$

が成り立ちます。一度2行2列くらいのヤコビ行列で確認してみるといいかもしれません。

2.5　テイラーの定理(ｐ５８、ｐ１５４)

テイラー展開による多項式・三角関数・指数関数近似、あるいは、ロピタルを使わない極限計算が、試験に出ます。試験についてのプリントで、わざわざ解説しているので、出る可能性が高いと思います。ロピタルは範囲外ですので、検算で使ってください。テイラーの定理に関しては、テイラー近似多項式、テイラーの定理、テイラー展開の順に説明していきます。プリントや教科書とは順番が逆になっているようです。

2.5.1 テイラーの近似多項式（p58）

今までは、あるグラフのある点における接線を、1階微分係数を用いて表していました。接線とは、大雑把に言うと直線の中で点$(a, f(a))$において$y = f(x)$のグラフに一番近い直線のことです。接線は直線なので一次式で表しています。そこで接線、すなわち直線という制限を緩めて、点$(a, f(a))$において$y = f(x)$のグラフに最も似ている、多項式で表せる曲線（グラフ）を考えます。その多項式をテイラー近似多項式と呼んでおきます。$x \to a$とするときに、もとのグラフの振る舞いと近似式の振る舞いが似ている式を近似多項式とします。この式を用いれば、三角関数でも指数関数でも対数関数でも（これらの関数と多項式は定義域でC^∞級関数です）、ある点において、n次の多項式関数で近似ができるということです。多項式というのは、数の加減乗除で表せる式で、sinとかlogなどの特別な関数を、単純な関数で近似ができるというのがこの式の意味するところです。ではこれから、その式を導いていきましょう。

少し具体的に、一次式の接線方程式を、二次式の曲線方程式に拡張してみます。関数$y = f(x)$の点$\left(a, f(a)\right)$での接線の方程式は、微分係数を使って $y = f(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ と書けました。では、この接線の式を2次式に拡張するとどうなるでしょうか。つまりある定数 p, q, r を使って点$\left(a, f(a)\right)$の近くでの振る舞いを、$y = f(x) = p(x-a)^2 + q(x-a) + r$と書けたときの p, q, r を求めてみます。まず、点$\left(a, f(a)\right)$を通るので$r = f(a)$です。また一度微分すると、$q = f'(a)$となり、同様にして2階微分で$p = \frac{f''(a)}{2}$となるので、

$$y = f(x) = \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + f'(a)(x-a) + f(a)$$

と書けることが分かります。このことを一般化してみます。

まずは、多項式関数からテイラーの近似多項式につなげていきます。これから関数$y = f(x)$はn次以下の多項式とします。また、$f^{(n+1)}(x) = 0$（0の定数関数）を満たすものとします。ちなみに、$f^{(n+1)}(x) = 0$であるとき、$f(x)$がn次以下の多項式であることは同値です（証明は実際にn次の多項式で$n+1$回微分をしてみましょう）。nを自然数とし、$a_0, a_1, \cdots, a_n$を$n+1$個の実数とします。関数$y = f(x)$で $f_n^{(k)}(0) = a_k$ $k = 0, 1, \cdots, n$を満たすものは

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n$$

この式ただひとつです。証明は求める多項式を$f_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$とおき、条件から$x = 0$として微分していけば、 c_k を a_k で一意的に表せます。ここでは$x = 0$ でのk階微分係数がa_kと一致するとしていますが、$x = a \neq 0$のときには、多項式を x^k で整理せずに、$(x-a)^k$で整理すれば同様に証明できます。式だけ書きます。

$$f_n^{(k)}(a) = a_k \qquad f_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \tfrac{a_2}{2!}(x-a)^2 + \tfrac{a_3}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \tfrac{a_n}{n!}(x-a)^n$$

n次以下の多項式ということを仮定しているので、x^nの項までしか書いていません。また、$f^{(n+1)}(x) = 0$ということもあるので、$n+1$次以上は 0 になります。

よって、多項式と微分の間には、1からnまでの自然数kでk階微分係数a_kを任意に与えると、もとの多項式を実現する関数がただ一つ存在し、それは多項式で表せるという関係があることが言えるようです。

今までは多項式での話ですが、式の右辺には「もとの多項式について」の情報というより、多項式によって表されたグラフの情報が入っていて、多項式とは限らない関数$f(x)$でも、多項式で表せたとすれば、それは上のように表せるように思えます。そこで、多項式とは限らない普通の関数が与えられた時、$x = a$でのn階までの微分係数$f^{(k)}(a)$がすべてk次のx

の係数と一致しているn次以下の多項式がただ一つだけ存在し、

$$f_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ \cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

という多項式であることが分かります。よってこの式を点$(a,f(a))$における$f(x)$のn次のテイラー近似多項式と定義します。ただし、与えられた関数が区間$[\alpha,\beta]$でC^n級関数かつ $\alpha\leq x,a\leq\beta$ であるときの話です。

2.5.2 剰余項(p59)

また、簡単のために基本的な接線から考えてみます。接線の傾きである微分は$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$において、移項して通分すると、$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0$となります。ということは、おなじみ接線の方程式$f_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$という一次式は$x\to a$のとき、$f(x)$と$f_1(x)$との差が$x-a$に比べて無視できる、という一次のテイラー近似多項式といえるわけです。この「$x\to a$のとき、$f(x)$と$f_1(x)$との差が$x-a$に比べて無視できる」という部分がランダウの記号を用いて、

$$f(x)-f_1(x)=o(x-a)\text{、すなわち、}f(x)=f_1(x)+o(x-a)$$

と表せます。これが 2 次の近似式、3 次の近似式、･･･と成り立つので、

$$f(x)=f_n(x)+o((x-a)^n)$$

と書けます。ロピタルの定理でn回微分すれば証明はできます。

これから剰余項について考えます。

テイラー近似多項式$f_n(x)$は近似式です。つまり、もとの関数$f(x)$とは多少なり誤差があります。そこで、

$$R_{n+1}(x)=f(x)-f_n(x)$$

で、誤差$R_{n+1}(x)$を定義します。これを(n次の)剰余項といいます。n次のテイラー近似多項式から先の誤差なので、$n+1$と表示しています。すると、$R_{n+1}(x)=\ o((x-a)^n)$ということが分かります。では、この剰余項を具体的な関数、または定数で表してみましょう。

2.5.3 テイラーの定理(p58)

近似式はn次までの多項式なので、$n+1$次以上の項がその剰余項に当てはまってもおかしくはありません。というわけで、関数$y=f(x)$が区間$[a,b]$でC^n級関数かつ、区間(a,b)でC^{n+1}級関数として、$a\leq x\leq b$を満たすxについて、

$$f_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ \cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{A}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

が成り立つように定数Aをとります。つまりn次までの項は近似式で、その誤差を$n+1$次の項が補正してくれるように定数Aを定め、これからそのAを求めます。求める方法は教科書p59に載っています。次数が一つ違いますが、やることはまったく同じなので割愛します。その結果は$a\leq c\leq x$となる数で、$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=A$となります。この定数$c$が存在することを示したものがテイラーの定理です。よって剰余項$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$が求まりました。剰余項の表示の仕方にはいろいろあって、この平均値の定理的な表示方法をラグランジュの剰余項といいます。

これから、定番中の定番の関数についてテイラー近似式の例をあげていきます。剰余項にはランダウの記号を使います。ちなみに、$a=0$としたときの近似式です。

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\ o(x^{n+1})$$

$$\log(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{(n-1)}}{n}x^n + o(x^{n+1})$$

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^{n+1})$$

という感じです。

2.5.4 テイラー展開（p263～p265）

少し級数の話になってしまいますが、ご勘弁を…。すべては数学者の責任です。関数$f(x)$が何回でも微分可能、つまりC^∞級関数であったとき、好きなだけ次数の高いテイラー近似式を考えることができます。それを無限級数で書きます。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

これをテイラー級数といいます。また、

$$f(x) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

が成り立つとき、これを、aを中心とした$f(x)$のテイラー展開と呼びます。

しかし、この展開はどんな関数でもできるというわけではありません。その理由は大まかに言うと、級数が発散してしまうかもしれないからです。それでは関数ができません。よって何かしらの条件が付きます。この条件に関して考えるべき問題は、「$f(x)$から作ったテイラー級数に$x=b$を代入してできる数列は、どの範囲のbに対して収束するか」 と、「テイラー級数が収束するbに対して、その級数の極限は$f(b)$に一致するか」 という二つがあります。そこでこのことをもとに次のようにテイラー展開可能ということを定義します。

$f(x)$のbを中心としたテイラー級数がbを含むある開区間で収束して極限が$f(x)$に一致するとき、$f(x)$は$x=b$のまわりでテイラー展開可能であるといいます。特に、定義域内の任意の点まわりでテイラー展開可能のとき、$f(x)$はテイラー展開可能といいます。

そして、$f(x)$が$x=b$でテイラー展開可能なとき、$f(x)$の$x=b$におけるテイラー級数のことをテイラー展開と呼びます。では、実際にテイラー展開可能を示すのに満たすべき条件とは何なのでしょうか。答えを先に言うと、

すべての $n \in \mathbb{N}$とすべての $|x| < R$となるx に対して $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$

が成り立つ実数RとMが存在するということです。より一般的な命題が教科書p264に載っていて、ここでは閉区間を定めて実数Mを連続関数$h(x)$としています。そして実際にこの条件を満たせばテイラー級数が収束し、極限が$f(b)$に一致していることが証明されているので、それをプリントと一緒に読んでください。e^x、$\sin$、$\cos$ではすべてのxについてテイラー展開可能が示せますが、$\log(1+x)$では適用できません。テイラー級数が収束しない関数もそれなりに存在します。また、テイラー級数が収束してももとの関数に一致しない関数も存在するので、ややこしいです。

2.5.5 二変数のテイラーの定理（p154）

二変数の一次近似は$P(x,y)=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)$とおいたときに、$\lim_{(\mathrm{x,y})\to(\mathrm{a,b})}\frac{f(x,y)-P(x,y)}{\sqrt{(\mathrm{x-a})^2+(\mathrm{y-b})^2}}=0$が成り立つものと定義しました（一次近似が存在することが微分可能の必要十分条件です）。そして一次近似が存在する場合、A、Bは$A=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$、$B=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$でなければならないことも分かっています。一方、二次関数$Q(x)$が一変数関数の二

次近似であることは、$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^2}=0$で特徴づけられました。これはテイラーの定理でもこう主張しています。だから

二変数の二次式$Q(x,y)$が$f(x,y)$の(a,b)における二次近似であることは、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-Q(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}^2}=0$$

が成り立つこととして定義されるべきでしょう。そこで、$Q(x,y)$を$(x-a)$、$(y-b)$の二次式として具体的に

$$Q(x,y)=c+p(x-a)+q(y-b)+A(x-a)^2+2B(x-a)(y-b)+C(y-b)^2$$

とおいて計算してみると、

$$Q(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)(x-a)(y-b)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2$$

という結論に至ります。計算は煩雑で複雑で書いたら１ページ埋めるかもしれないので書きません。これは結果だけ知っていれば大丈夫だと思います。もう細かいことは一変数で書いてきたはずなので、答えに入ります。

$f(x,y)$をC^{n+1}級関数とし、(a,b)をその定義域の一点とします。このとき、定義域の点(x,y)に対して、$0<\theta<1$なるθが存在して、次式

$$f(x,y)=f(a,b)+\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b))$$

が成り立ちます。ここで

$$\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)=(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+(y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

という感じで普通の式のように展開ができます。一番後の項は剰余項です。偏微分があって式が複雑に見えますが、ほとんど一変数関数のテイラーの定理と変わりません。二変数テイラーの定理は試験に出なそうですが、次の極大極小判定で使うので一応書きました。どちらかというと極大極小判定のほうがテストに出ます、きっと。

2.5.6 関数の極大極小判定（p58、p61、p157～p161）

・一変数関数

言葉の定義からしておきます。$x=a$が関数fの極大点であるとは、区間$(a-r,a+r)$の範囲では$f(a)$が最大値であるような正実数rが存在することを言い、aがfの極大点であるとき$f(a)$を極大値といいます。極小点、極小値も同様に定義します。この先は極大に関して書いていきますが、極小も同様のことをやればいいので書くことをやめます。極大か極小かを問題にしないときは「極値」と略して言います。また、この定義ではfが微分可能、あるいは連続でなくても成り立っている言い方ですが、微分を使った判定をしようとしているのでfは微分可能であると仮定します。

最初に、$x=a$で関数fが極値をとるならば、$f'(a)=0$です。証明は、$f(x)-f(a)\leq 0$ということを用いて、区間を二つにわけて計算をしたりしていきます。教科書p57に書いてありました。難しくはありません。これは極値であることの必要条件です。接線の傾きが0ということですが、グラフを考えればイメージがすぐできると思います。これから十分条件について考えます。その一つの方法が２階微分です。それを定理にして書いてみます。

C^2級関数$f(x)$が $x=a$ において、$f'(a)=0$、$f''(a)<0$を満たすならば、$f(x)$は$x=a$で極大値をとります。証明には、テイラーの定理より、

$$f(x)-f(a)=\frac{1}{2!}f^{(2)}\big(a+\theta(x-a)\big)(x-a)^2$$

を満たす $0<\theta<1$ が存在し、また$f(x)$はC^2級関数より、$f^{(2)}(a)$は連続です。よって x が a に十分近いとき、$a+\theta(x-a)$ も a に近いので、$f''(a)<0$より$f''\big(a+\theta(x-a)\big)<0$となります。また$(x-a)^2\geq 0$より、$f(x)-f(a)\leq 0$となります。これを$C^n$級関数に拡張します。その前に、$a+\theta(x-a)=c$とおいておきます。

定理2．14（p61）より抜粋します。$n\geq 2$とし、C^n級関数$f(x)$が点aで $f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$、$f^{(n)}(a)\neq 0$ を満たすとします。テイラーの定理より

$$f(x)-f(a)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-a)^n$$

が成り立ちます。このとき、

$$\begin{cases} n\text{が偶数で}f^{(n)}(c)>0\ \left(f^{(n)}(c)<0\right)\text{ならば、}f(x)\text{は}x=a\text{で極小}\quad(\text{極大}) \\ n\text{が奇数で}f^{(n)}(c)>0\ \left(f^{(n)}(c)<0\right)\text{ならば、}f(x)\text{は}x=a\text{の周りで単調増加}\ (\text{単調減少}) \end{cases}$$

が言えます。証明はnが偶数の場合、上に書いたことをそのまま使います。nが奇数の場合の証明は、教科書p61を見てください。

・二変数関数

(a,b)が二変数関数$f(x,y)$の極大点とは、(a,b)を中心とした半径rの内部の点では$f(a,b)$が最大であるような正実数rが存在することを言います。一変数関数の極値では接線の傾きがゼロ、つまりx軸に平行となっていることを意味します。これに対応することを二変数関数のグラフで想像してみると、極値では接平面がxy平面に平行になっているだろうと考えられます。よって、二変数関数が点(a,b)で極値をとる必要条件は、偏微分可能な二変数関数fにおいて、

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

となります。証明は$y=b$と固定してできるｘの一変数関数$f(x,b)$は$x=a$で極値をとり、$f(x,b)$の$x=a$での微分係数は$x=a$でゼロです。すなわち、$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$です。$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$も同様です。

さて、これから二変数関数が極値を持つための十分条件を考えます。$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$は必要条件なので仮定します。二変数関数のテイラーの定理より、

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{1}{2}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b))$$

を満たす$0<\theta<1$が存在します。$a+\theta(x-a)=s,\ b+\theta(y-b)=t$とおきます。上の式を展開して、

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{1}{2}(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,t)+(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(s,t)+\frac{1}{2}(y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s,t)$$

と表せます。ここで、$x-a=X, y-b=Y, \mathrm{A}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,t), B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(s,t), C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s,t)$とおいて式を書き換えます。

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{1}{2}(AX^2+2BXY+CY^2)$$

よって極値の判定には $AX^2+2BXY+CY^2$ という式を考えればいいことがわかります。平方完成して、

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = A\left(X + \frac{BY}{A}\right)^2 + \left(\frac{AC - B^2}{A}\right)Y^2$$

となるので、この式に関して正負を場合分けして求めていきます。結果を書くと、

$$\begin{cases} \mathrm{A} < 0, B^2 - AC < 0 \text{ ならば、} f(x,y) \text{は} (a,b) \text{で極大} \\ \mathrm{A} > 0, B^2 - AC < 0 \text{ ならば、} f(x,y) \text{は} (a,b) \text{で極小} \\ B^2 - AC > 0 \text{ ならば、} f(x,y) \text{は} (a,b) \text{で極値をとらず、点} \big(a,b,f(a,b)\big) \text{はグラフの峠の点} \end{cases}$$

となります。峠の点というのは、ある点(a,b)を通るある曲線では極小ですが、他の曲線では極大になるような点のことです（ちなみにこの点のことを鞍点といいます）。また、$B^2 - AC = 0$のときに、二階微分の値だけでは極値の判定はできません。これは教科書p158の定理4．16に書いてあって、この証明はプリントで理解しておいてください。もうそろそろ手を抜きます。だいぶ、疲れてきました。この判定法に関しても具体的な問題を出します。

3　級数

3.1　べき級数と収束半径

3.1.1 無限級数（p236、p237）

超基本からです。無限級数とは何でしょうか。普通、数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$という数列があったときに、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$を無限級数と無造作に言っていますが、細かく言うと$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \cdots, S_n = S_{n-1} + a_n, \cdots$によって数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$を定めていて、この極限を問題にしているわけです。なので、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$という表記には部分和の作る数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$そのものと、その極限$\lim_{n\to\infty} S_n$を同時に意味しています。また、無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が収束するなら$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$が成り立ちます。しかし、逆は成り立ちません。

・無限級数の性質（p240定理6．7）

無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が収束するときの性質です。

- この級数に有限個の項を付け加えても、あるいは除去しても、やはり収束する
- λをnに関係しない定数とするとき、$\sum \lambda a_n$も収束し、$\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$が成り立つ
- $a_n \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$が成り立つ
- $\sum b_n$も収束するとすれば$\sum(a_n + b_n)$も収束し、$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$が成り立つ

普通の数列と同じですね。級数といっても部分和の数列を作れば普通の数列を変わらないので、分かると思います。証明は教科書に載っています。

3.1.2 無限級数の収束条件・判定法（p238〜p244）

・コーシーの収束条件（p241定理6．8）

数列におけるコーシーの収束条件は、

$$\forall_{\varepsilon>0},\ \exists_{N\in\mathbb{N}},\ n > m \geq N,\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

でした。ここに部分和の数列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$を入れると、

$$\forall_{\varepsilon>0},\ \exists_{N\in\mathbb{N}},\ n > m \geq N,\ |S_n - S_m| < \varepsilon$$

一方、$S_n - S_m = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{m+1}$ですので、この式は

$$\forall_{\varepsilon>0},\ \exists_{N\in\mathbb{N}},\ n > m \geq N,\ |a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{m+1}| < \varepsilon$$

となり、これが無限級数の収束条件です。プリントでは複素数に拡張していますが、複素数の場合でも実部と虚部に分けることで証明ができます。

・比較判定法（p238定理6．2）

任意の n に対し $0 \leq a_n \leq b_n$ とします。このとき、

1, $\sum b_n$ が収束すれば$\sum a_n$ も収束する

2, $\sum a_n$ が発散すれば$\sum b_n$ も発散する

がいえます。はさみうちの原理と追い出しの原理の級数 ver.って感じですね。注意点が一つあって、この方法は正項級数、すなわち数列の各項が正の数についての判定法です。

・コーシーの判定法（p239定理6．4）、ダランベールの判定法（p239定理6．5）

正項級数 $\sum a_n$ に対し

1, $0 < \exists_r < 1,\ \exists_{N\in\mathbb{N}},\ \forall_{n\geq N},\ \sqrt[n]{a_n} \leq r$ が成り立つならば、 $\sum a_n$ は収束

2, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ が存在して $0 \leq r < 1$ ならば、 $\sum a_n$ は収束

3, 無限個の n に対し $a_n \geq 1$ ならば、 $\sum a_n$ は発散

4, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ が存在して $r > 1$ ならば、 $\sum a_n$ は発散

これがコーシーの判定法です。教科書順に並べています。基本的な考え方は、数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$と、初項、公比が共に正数rの等比数列とを比べてみることです。初項も r にしたのは第n項でn次にしたかったからです。つまり、 a_n と r^n を比べられるようにします。1 や 2 が言っていることは、公比が $0<r<1$ のときには等比数列r^nが収束することを利用して、$a_n \le r^n$から、$\sqrt[n]{a_n} \le r$と変形すると、比較判定法のはさみうちの原理的なものから収束となります。n乗根に変形できるのは、正項級数と仮定しているからです。3 は $a_n = 1$ のときを考えればすぐ分かります。証明は教科書にちょっと書いてあります。

また、正項級数 $\sum a_n$ に対し

1, $0 < \exists_r < 1$, $\exists_{N\in\mathbb{N}}$, $\forall_{n\ge N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r$ が成り立つならば、 $\sum a_n$ は収束

2, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ が存在して $0 \le r < 1$ ならば、 $\sum a_n$ は収束

3, ある N が存在して $\forall_{\mathrm{n\ge N}}$ に対し $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ ならば、 $\sum a_n$ 発散

4, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ が存在して $r > 1$ ならば、 $\sum a_n$ は発散

これがダランベールの判定法です。これも等比数列をもとに考えています。等比数列を第$n+1$項と第n項の比が一定という性質をもちいて、$\frac{a_{n+1}}{a_n}$という比を考えてみます。このとき、a_nは0でないと仮定しますが、たとえ0があっても、収束・発散や和の値には関係がないので、こう仮定しても問題ありません。1は具体的に$\mathrm{r} = \frac{1}{4}$として考えると、$a_{n+1} \le \frac{1}{4}a_n$となるので$a_{n+1}$は$n$が大きくなるとどんどん小さくなることが分かります。そのため収束するということです。証明は教科書に書いてありました。コーシー、ダランベールともに証明は演習問題になっています。

これらの判定法はのちのち収束半径を求めるのに発展して使っていきます。

3.1.3 絶対収束と条件収束(p241)

これまでは正項級数という、すべてのnで第n項が正である数列の級数の収束・発散を考えてきました。しかし数列は負の数にもゼロにもなるのが一般的なのでその数列についての収束・発散を調べてみます。

まず負の数もとりうる数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$において各項の絶対値をとり、その無限級数を調べます。すなわち、$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ という無限級数を考えます。これは正項級数になるので今までの判定法が使え、収束するか否かが分かります。ここで、無限級数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$が収束するとき、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$は「絶対収束」するといいます。また、すぐにとても重要な系(p241)が得られます。

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束します

これは直観的にもすぐ分かる系です。言いかえれば「絶対収束すれば収束する」ということです。すべて正の数でも収束するのだから、ましてや負の数があれば正の数と打ち消しあったりしてもっと収束しそうじゃないですか。証明は、三角不等式を使います。$|\sum_{n=1}^{\infty}a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$から、コーシーの収束条件でも用いれば証明できます。

一方、その逆は言えません。つまり無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束しても、$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するとは言えません。このように、収束するが絶対収束しない無限級数のことを「条件収束」する無限級数と言います。

これから絶対収束と条件収束の性質の違いを見ていきます。

・絶対収束の性質(p241定理6.9、p242定理6.10(p243系))

絶対収束する級数は扱いやすい性質を持っています。絶対収束する無限級数を考える以上、各項の絶対値をとった級数がしょっちゅう出てきて絶対値記号を書くのがめんどうなので、これからははじめから絶対値をとった級数として正項級数を考えます。では、正項級数の便利な性質をまずは列挙してみます。

- 3.1.2 の比較判定法が使える
- 絶対収束する無限級数は項をどのように並べ替えても同じ値に収束する
- $\sum a_n$、$\sum b_n$を和がそれぞれ A, B である絶対収束級数とし、両者の項a_m、b_nをもれなく重複なく取り出してつくった

積$a_m b_n$を任意の順序に並べて得られる級数 $\sum c_n$ は絶対収束で、$\sum c_n = AB$

一つ目の性質は、比較判定法の条件が正項級数ということなので特に問題はないでしょう。二つ目の性質は直観的に分かりやすいでしょうか。確かに足し算は順番を入れ替えても結果は同じですが、順番が違うなら部分和の数列は並べ替える前と後でまったく別のものになっているので、その極限が一致するかどうかは見た目には判別しづらいこともあります。証明は教科書に載っているので参照して下さい。三つ目の性質はなにか可能性が広がる感じのする性質です。ただ順番に積をとるだけでなく、もれなく取り出した積を任意の順序で足しても絶対収束するというやさしさがあります。これも証明は教科書に書いてあるので見て下さい。

・条件収束の性質

条件収束はなんらかの条件のもとで収束するというわけでなく、普通に収束はするけれども絶対収束はしないというものです。なのでむしろ絶対収束のほうが、条件は厳しい感じがします。では条件収束する数列の性質を書いてみます。

- 条件収束する無限級数は項を並べ替えることによって任意の実数に収束させること、$+\infty$または$-\infty$に発散させることができる

これは例を見たほうが早いでしょう。ただ、少し長くなるので見なくてもいいという人は読み飛ばしてください。条件収束する無限級数として、交項級数があります。交項級数とは正数と負数が交互にあらわれる級数のことです。つまり各項が正の数列$\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$を用いて、$b_n = (-1)^{n+1} d_n$という数列を作り、この級数を交項級数といいます。ここで$d_n = \frac{1}{n}$とすると、無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$は条件収束します。それをこれから簡単に証明します。

部分和を $S_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ とおきます。すると

$$0 < S_2 < S_4 < \cdots < S_{2n} < \cdots < S_{2n-1} < \cdots < S_3 < S_1 = b_1$$

が成り立ち、また

$$S_{2n-1} - S_{2n} = b_{2n} \to 0$$

なので

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$$

となる実数 S が定まります。よって

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

となります。したがって、無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$は収束します。一方$|b_n| = d_n = \frac{1}{n}$です。この無限級数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$が収束しないことを証明します。証明方法はいろいろありますが、1つは教科書p241に載っているので、ここでは積分による証明を書きます。$f(x) = \frac{1}{x}$の積分と比較しましょう。

$$\frac{1}{n} > \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$$

が成り立ちます。よって、

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx = \log(n+1) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

となって、追い出しの原理より示せました。つまり絶対収束はしません。

以上より、収束はするが絶対収束はしないことが分かったので、この無限級数は条件収束します。その収束値は$\log 2$なんですが、この証明は問題の解答のほうに補遺として載せておきます。覚えていればですが。さらに、p, qを自然数とし項を並べ替えると、

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \cdots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q-2} - \frac{1}{2q-4} - \cdots$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$$

となります。つまり、p, qによって収束値が変わるということです。この証明も問題の解答に載せます。対数は実数全体を値域としていて、この式である程度の実数を表せます。$\frac{p}{q}$は有理数なので、対数の値域全体を表せないので、すべての実数とはいえませんが、他の並べ方によってその穴を埋められるかもしれないので、任意の実数に収束するといっても問題ないように思えます。

3.1.4 べき級数(p256)

これはどういうものかだけ書きます。というか他に書くものがありません。数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$の他に実数aが一つ決まっているとき、単なる無限級数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ではなく、各項に $(x-a)^n$ をかけた無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

を冪級数(べききゅうすう)と言います。テイラー展開は冪級数の特別な場合です。そしてこの級数が収束するような点xの集合を、この冪級数の収束域と言います。

・定理1.5(プリント)

下の(1)、(2)、(3)について(1)⇒(2)⇒(3)が成り立ちます。あと、見やすくするために$a=0$としておきます。

(1)$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束する(絶対収束とは限らない)。

(2)$|a_n x^n| \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$

(3)$|x'| < |x|$ならば$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x'^n$が絶対収束する

証明はプリントに書いてあるので、読んでください。そんなに理解不能ではないはず。というか東大生のみなさんの力をもってすれば楽勝と言いたいところです。あと、プリントでは複素数で書いてありますが、複素数でも同様に扱えて、あとはオイラーの公式とか複素数の極座標表示とかドモアブルの公式などは知っておくべきだと思います。

3.1.5 収束半径(p257、p259)

冪級数において、xを定数として$a_n(x-a)^n = b_n$とおいてみましょう。無限級数$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$が収束する条件を考えます。まず、 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = r$ が存在するとします。するとダランベールの判定法より、 $0 \le r < 1$ ならば絶対収束、$r > 1$ ならば発散でした。b_nを $a_n(x-a)^n$ に戻すと、 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}(x-a)$ となるので

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-a| = r$$

です。ということはこの場合、x にはある実数が入るので $|x-a|$ はある定まった実数ですから、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = R$$

も存在して、$R|x-a| < 1$ なら絶対収束、$R|x-a| > 1$ なら発散ということになります。すなわち、

$|x-a| < \frac{1}{R}$ を満たすxについては絶対収束、$|x-a| > \frac{1}{R}$ を満たすxについては発散

ということが結論として出てきます。しかし、これをそのまま判定法には使えません。例えば、$\sin x$の$x=0$におけるテイラー展開は、

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$$

であるために、そのまま第n項と第$n+1$項の比をとっても、ゼロになるか∞に発散するかしかありません。この場合は

$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$とおくことで $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ となるので、この無限級数は任意のxについて絶対収束することが分かります。

同様にコーシーの判定法を用いてみましょう。同じように $a_n(x-a)^n = b_n$ とすると$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = r$ が存在するとして $0 \le r < 1$ ならば絶対収束、$r > 1$ ならば発散です。b_nを $a_n(x-a)^n$ に戻すと、$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{|a_n||x-a|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}|x-a|$ となるので $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}|x-a| = r$ となり、$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = R$ がいえるので、$R|x-a| < 1$ なら絶対収束、$R|x-a| > 1$ なら発散ということになります。すなわち、

$|x-a| < \frac{1}{R}$ を満たすxについては絶対収束、$|x-a| > \frac{1}{R}$ を満たすxについては発散

ということが結論できます。$|x-a| = \frac{1}{R}$ を満たすxについては収束することもあるし、しないこともあります。

以上の性質から冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ に対して、ある $0 \le R \le \infty$ があって次が成り立つ

$$|x| < R\text{で}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\text{は絶対収束し、}|x| > R\text{で収束しない}$$

この冪級数に対して一意に定まる R を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径といいます。

この収束半径の求め方には上で書いてきたようにコーシーとダランベールの 2 通りがあります。

（コーシー）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = r$ が存在するとき収束半径は $\frac{1}{r}$（$r = 0$ならば∞）

（ダランベール）$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ が存在するとき収束半径は $\frac{1}{r}$（$r = 0$ならば∞）

です。注意したいのは判定法で、xは使いません。xの係数である数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の行き先のほうが収束に関係してくるので、一緒に計算しないようにしてください。どっちを使えばよいかと言ったら、ダランベールのほうが使う頻度は高いと思います。コーシーを使うと、n乗根の中にnが入っているもののnを無限大に飛ばしたときの収束値などが問題になってしまって簡単に求められないと思うので、まずはダランベールを試して何をやってもできなかったらコーシーを使うという感じでいいと思います。

3.2　項別微積分（ｐ２５２、ｐ２５３、プリント）

その名の通り項別に微積分した新たな数列の級数などについての分野です。だいたいがプリントのまる写しなので、正直読む必要も書く必要もない感じがします。プリントをよく読んでみてください。

冪級数のいいところは、収束円（収束半径を半径にもつ平面上の円）の内部において、あたかも多項式と同様に項ごとに微分したり、積分したりできます。ここから先も見やすくするために$a = 0$としておきます。

3.2.1 補題０．１（プリント）

ロピタルの定理っぽい定理です。

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$の収束半径と、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$の各項を微分して得られるべき級数$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$と、
積分して得られるべき級数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$の収束半径は等しくなります。

便利そうに見える定理です。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$という形で収束半径が求めづらかったら、とりあえず微分なり積分なりしても収束半径を求められるということです。証明の方針は次のとおりです。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$と$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$の関係と、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$と$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$の関係は一緒です。なので、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$と$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$の収束半径が等しいことを言えばよいというわけです。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$の収束半径を$R$、$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$の収束半径を$R'$として $R' \le R$かつ$R' \ge R$ を示します。

（1）$R' \le R$のとき

$|x| < R'$となる任意のxをとります。すると$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$は収束するので、$|n a_n x^{n-1}| \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$が成り立ちます（3.1.4 の定理1．5）。$a_n x^n = \frac{x}{n}(n a_n x^{n-1})$より $|a_n x^n| \longrightarrow 0$ も成り立ちます。なので再び 3.1.4 の定理1．5より$|x'| < |x|$

となる任意のx'について$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$は絶対収束します。$x$は任意だったので、結局$|x'| < R'$なる$x'$に対して$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$が絶対収束するので、これは$R' \leq R$を意味します。

(2)$R' \geq R$のとき

$|x| < R$となる任意のxをとります。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$は収束するので $|a_n x^n| \longrightarrow 0$ が成り立ちます(3.1.4 の定理1．5)。よってある自然数Nがあって$n \geq N$ならば $|a_n x^n| \leq 1$ がいえます。このとき$|x'| < |x|$となるx'に対して $s = \left|\frac{x'}{x}\right| < 1$ とおくと

$$|n a_n x'^{n-1}| = n \left|\frac{x'}{x}\right|^n |a_n x^n| \left|\frac{1}{x'}\right| \leq n s^n \left|\frac{1}{x'}\right|$$

$s < 1$より $n s^n \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$ なので $|n a_n x'^{n-1}| \longrightarrow 0$ が成り立ちます。ここで $|x''| < |x'|$ となる任意のx''について$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x''^{n-1}$は絶対収束します。$x$は任意だったので、結局$|x''| < R'$なる$x''$に対して$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x''^{n-1}$が絶対収束するので、これは$R' \geq R$を意味します。

3.2.2 定理0．2(プリント)、定理6．16(p252)、定理6．17(p253)

冪級数の性質の話です。 Rを冪級数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$の収束半径とします。そのとき、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$は$|x| < R$で次のような性質をもちます。

- 連続関数である
- 微分可能であり、さらに

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

が成り立ちます。つまり微分と総和の計算のどちらを先にやっても結果は変わりません(項別微分可能)。

- 積分可能であり、さらに

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

が成り立ちます。つまり積分と総和の計算のどちらを先にやっても結果は変わりません(項別積分可能)。

定理6．16が項別積分、定理6．17が項別微分の定理となっています。

補題0．1と定理0．2をまとめたものが教科書p258の定理6．21です。広義一様絶対収束などと書いてありますが、ようは「範囲内でならば同じように絶対収束するよ」という感じです。

これから先はあっさり書きます。

・定理0．3

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$を$b_n \geq 0$である級数で収束しているとします。$f_n(x)$をある部分集合Dの連続関数で、

$\forall_n, \forall_{x \in D}, |f_n(x)| \leq b_n$を満たすもの

とします。このとき、この関数による級数$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$は絶対収束し、連続関数を定めます。

証明はごく基本的なコーシーの収束条件と連続の定義でできるっぽいです。

・べき級数展開への応用

ある関数の冪級数を求めたいとき、ダイレクトに出す方法(テイラー展開)と、いったん微分してから導関数の冪級数を求めてそれを積分するという方法があります。

ある関数$f(x)$があったとき、$f'(t) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n t^n$を求めて、3.2.2 より

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$

として求めるという方法があります。プリントにいくつか例が載っているので読んでおいてください。

・べき級数展開の一意性

命題0．7によれば、$|x| < R$において$f(x) = \sum a_n x^n$と書けたとすると、$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ がすべてのnについて成り立ちます。したがって $f(x) = \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ であるため、冪級数による表示はいつでもテイラー展開です。また、冪級数の求め方が二通りあっても、冪級数は一つに定まるということです。証明は項別微分をしまくればいいと思います。項別微分では収束半径が変わらないので、xの範囲を気にする必要はありません。

あとがき･･･

一変数関数と二変数関数を同時に作るのは無理がありました・・・。二変数関数の説明がややこしくなるほど長くなってしまって申しわけないです。いろいろ見ながら書いていたら、これも書こうあれも書こうと思ってしまって、結果こんなんになりました。また、級数のところは特にですが、書き方がめちゃくちゃになっているので、誤解の恐れがあります。気を付けてください。最後に言っても無駄なんですけど・・・。

質問、誤り、誤字脱字、致命的欠陥、意見、要望、苦情などがあればどしどし言ってください。できるだけ何とかします。あと、東大生のみなさんを馬鹿にしたくらい簡単なことも書いています。その辺は自由に読み飛ばしてください。まぁ最後に読み飛ばせと書いても無駄なんですけど・・・。

このプリントを作るのにあたって、数理科学研究科の牛腸徹、清野和彦両先生のサイトを参考にさせていただきました。ここに記して謝意を表します。あと実は Wikipedia にもお世話になりました。

ということで、３１組で優を独占できるように頑張ってください。陰ながら応援させていただきます。