

2009 年度夏学期 数学 IB 定期試験 予想問題①

09 年 9 月

解答は別紙に、計算用紙 2 枚

持ち込み不可

1

次の偏微分を計算せよ。

1. $\frac{\partial}{\partial x} (2y^3)$
2. $\frac{\partial}{\partial x} (\tan^{-1} x^3 (y^2 + 1))$
3. $\frac{\partial}{\partial y} \left(\log \left(\frac{ax - by}{cx + dy} \right) \right)$
4. $\frac{\partial}{\partial y} \left(\sin^{-1} \sqrt{\frac{x^2 y^3 + 1}{1 - x^3 y^2}} \right)$

2

\mathbb{R}^2 上の C^2 級関数 $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$ を定める。

1. 停留点を全て求めよ。
 2. (1) で求めた停留点について、狭義の極値を取るかどうか調べよ。また、極値を取る場合にはその極値を求めよ。
- 補. \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x)$ が $x = a$ で極小値を取るための十分条件は何か。証明付きで答えよ。

3

\mathbb{R}^2 上の関数 $f(x) = \tan^{-1}(x)$ ($\mathbb{R}^2 \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$) を定める。

1. $x = 0$ におけるテイラー級数を求めよ。
2. (1) と言える理由を有限マクローリン展開を用いて示せ。
3. $\frac{\pi}{6}$ の近似値を x^6 の項まで計算して求め、誤差も簡単に評価せよ。

4

整級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ を定める。

1. 収束半径とは何か、説明せよ。(2、3行程度)
2. 「有限個の n を除き、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ となる $r (< 1)$ が存在すれば、整項級数 $\sum a_n$ は収束する (ダランベールの収束半径)」が成り立つことを証明せよ。
3. $a_n = \frac{n!}{n^n}$ のとき、整級数の収束半径 r を求めよ。

5

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき、 $\frac{d\theta}{dx}, \frac{d\theta}{dy}$ をそれぞれ求めよ。(ただし、 x, y のみで表すこと)

2009 年度夏学期 数学 IB 定期試験 予想問題②

09 年 9 月

解答は別紙に、計算用紙 2 枚

持ち込み不可

1

次の函数 z について、 z_v 、 z_u をそれぞれ求めよ。

1. $z = \tan^{-1}xy$, $x = \frac{e^v - e^{-u}}{2}$, $y = e^{av}$
2. $z = \frac{b-a}{a^2+b}$, $a = u+v$, $b = u-v$
3. $z = \sin^{-1}\frac{y}{x}\cos^{-1}\frac{x}{y}$, $x = \cos\frac{v}{u}$, $y = \sin\frac{u}{v}$
4. $z = f(x+3y)$, $x = u-2v$, $y = 3u-4v$

2

\mathbb{R}^2 上の C^2 級函数 $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2 + x^4 + 1$ を定める。

1. 停留点を全て求めよ。
2. (1) で求めた停留点について、狭義の極値を取るかどうか調べよ。また、極値を取る場合にはその極値を求めよ。
3. 2 変数函数のテイラー展開の公式は何か。証明付きで答えよ。($\theta \in (0, 1)$ を用いること)

3

漸近展開を用いて以下の (1), (2) に答えよ。

1. $\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$
2. $f(x) = x^2 \sin x - x \sin^2 x$ は極値を取るか、調べよ。

4

1. コーシー列とは何か、説明せよ。
2. 次の数列 a_n, b_n は収束するか、判定せよ。

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots, \quad b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

5

1. ロルの定理とは何か、説明せよ (2、3 行程度)
2. 次の①～③を証明せよ。

6

$$\text{函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ を定める。}$$

1. 原点で x, y について偏微分可能か調べよ。
2. 原点で全微分可能か調べよ。