数ＩＢシケプリ　～公式集～

１．偏微分

Chain rule　　x, y： tの関数　　$\frac{d}{dt}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt}$

応用　　$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$：constant

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y) = g(x)$$

x,y：u,v の関数　　$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

：Jacobi 行列

Jacobi 行列の性質　　$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$

平面極座標　　$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 \quad (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$

Euler の公式　　$f(x,y)$ =（n次同次多項式）　　$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$

接平面　　$z = f(x,y)$　　$z - f(a,b) = f_x(a,b) \times (x - a) + f_y(a,b) \times (y - b)$

二変数関数における可積分条件　　$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} = g, \frac{\partial f}{\partial y} = h\right)$

停留点　　(a,b)が$f(x,y)$の停留点　$\Leftrightarrow$　$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

２．平均値の定理

$x=c$での連続性 $\lim_{x\to c} f(x)=f(C)$

$^\forall\varepsilon>0$ について $^\exists\delta>0$ をとれば

$^\forall x\in\,]a,b[$ について

$|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon$

微分可能 fは$]a,b[$の上で微分可能 ⇔ $^\forall c\in\,]a,b[$ について

$f'(c)=\lim_{h\to 0}\bigl(f(c+h)-f(c)\bigr)$が存在

微分可能な関数は連続である

平均値の定理

$a,b\in\boldsymbol{R}$, $a<b$ において，f：$[a,b]\to\boldsymbol{R}$ 連続関数，$]a,b[$ 上で微分可能

$\Rightarrow {}^\exists c\in[a,b]$について，$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$が成立

$\Leftrightarrow \int_a^b f'(x)dx=f'(c)(b-a)$

$a,h\in\boldsymbol{R}$, f：(aおよび$a+h$ を含む閉区間，微分可能$)\to\boldsymbol{R}$

⇒ある$\theta\in\,]0,1[$をうまくとると，$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h$ とかける

Rolle の定理

平均値の定理の仮定に加えて， $f(a)=f(b)$ も仮定

$\Rightarrow {}^\exists c\in\,]a,b[$ において $f'(c)=0$

Cauchy の平均値の定理

$a,b\in\boldsymbol{R}$, $a<b$, f,g：$[a,b]\to\boldsymbol{R}$の連続関数，$]a,b[$ 上で微分可能

$g(a)\neq g(b)$, $^\forall x\in\,]a,b[\,, g'(x)\neq 0$

$\Rightarrow {}^\exists c\in\,]a,b[$ において $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

l'Hosptal の定理

$a\in\boldsymbol{R}$, $f(x),g(x)$：$x=a$のまわりで定義された微分可能関数，$f(a)=g(a)=0, g(x)=0$

を満たすxがaのまわりではaに限られる。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}\text{が存在する}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}$$

三角関数 $\lim_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$

3．近似としての微分

一次関数による近似

$f(x): x = a$のまわりで定義された関数　とすると、$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a)$

(xについての)偏微分可能性

$f(x): (x, y) = (a, b)$の周りで定義された関数　とすると、

$$\lim_{h\to 0} f(a+h, b) - f(a, b)$$　が存在する。

全微分可能性

$f(x, y)$：(a, b)で連続なC'級関数

$r(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a, b) - hf_x(a, b) - kf_y(a, b)$と定義する

$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} r(h, k) = 0$

ここで、C'級関数⇒全微分可能⇒偏微分可能である

４．級数の収束

定義

級数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束する ⇔ 数列$\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$が収束する。

Cauchy の判定条件(⇔Cauchy 列⇔収束列)

任意の$\varepsilon > 0$ についてそれにあわせて充分大きいm_εをとれば

$m_\varepsilon \leq {}^\forall n \leq {}^\forall m$　なる全てのn, mについて

$|x_m - x_n| < \varepsilon$　が成立。

Cauchy の判定条件の応用

優級数

$k_0 \geq 1,\ k_0 \leq {}^\forall k$ について $|a_k| \leq b_k$ であるとき、$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$：収束 ⇒ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$：収束

絶対収束

級数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束する ⇔ 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ が収束する。

級数が絶対収束するとき、その級数は収束する。

d'Alembert の判定法　（ここでは$a_k \neq 0$）

1）有限個のkを除き $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq r$ をみたすようなrが存在し、$r < 1$ならば

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は(絶対)収束する。

2）$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = r$が存在したとする。

$r < 1$なら$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束し、$r > 1$なら発散する。

収束半径　（$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^n$, $a_n \in R$ を整級数と呼ぶ。）

・任意の整級数は収束半径r $(0 \leq r \leq +\infty)$を持つ。

・整級数の収束半径がrである。⇔ 級数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^n$が$|x| < r$のとき絶対収束

$|x| > r$のとき発散

・$\sum_{k=0}^{\infty} a_k u^n$ ：収束　⇒　$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^n$ は$|x| < |u|$のとき絶対収束

・$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^n$, 収束半径 $r > 0$ とする

⇒$\sum_{k=0}^{\infty} n a_k x^{n-1}$ の収束半径もrであり、$f(x) =]-r, r[$ 上微分可能で

$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n a_k x^{n-1}$　が成立。

単振動の方程式

$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = -f(x)$　をみたす$f(x) = C' \cos x + C'' \sin x$（$C', C''$ ：定数）

より正確にいえば、$f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$(\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m},\ \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1})$$

5. Taylor 展開

Taylor の定理

$p, a, q \in \boldsymbol{R}$,　$p < a < q$,　$f :]p, q[\to \boldsymbol{R}$ の n 回微分可能な関数

$^{\forall}x \in]p, q[$,　$^{\exists}\theta = \theta_x \in]0,1[$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}\big(a + \theta(x-a)\big)(x-a)^n$$

一般に$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$を$f(x)$の$x = a$における Taylor 級数と呼ぶ。

漸近展開

$f(x)$: $x = a$のまわりで定義されたC^n級関数

$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$ とすると、

$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} R_{n+1}(x) = 0$　(つまり$R_{n+1}(x)$は$(x-a)^n$よりはやく 0 に収束)

Londaw の記号

$a \in R$, $f(x), g(x) := a$のまわりで定義された関数

$f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

特に　$f(x) = o(1)$ $(x \to a)$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

漸近展開は$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + o((x-a)^n)$ とあらわされる。

極大極小

$f(x)$: $x = a$のまわりで定義されたC^2級関数

$f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$　$\Rightarrow$　$f(x)$は $x = a$ で極小になる。

二変数の Taylor の定理

$f(x)$：(a, b)のまわりで定義されたC^n級関数

$(h, k) \in \boldsymbol{R}^2$充分小について、ある$\theta = \theta_{(h,k)} \in]0.1[$がとれて

$f(a+h,b+k)$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{l} f(a,b) + \frac{1}{h!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} f(a+\theta h, b+\theta k)$$

$n=1$のとき

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + (JF)_{(a+\theta h, b+\theta k)}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$(JF)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{pmatrix}$$: Jacobi 行列

$n=2$のとき

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + (JF)_{(a,b)}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h \quad k)\,(HF)_{(a+\theta h, b+\theta k)}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$(HF)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$: Hesse 行列

極大極小(停留点との関係)

$f(x)$：(a,b)のまわりで定義されたC^2級関数，(a,b)が停留点

1) $\det(HF)_{(a,b)} > 0$ かつ$f_{xx} > 0 \Rightarrow f$は(a,b)で極小
2) $\det(HF)_{(a,b)} > 0$ かつ$f_{xx} < 0 \Rightarrow f$は(a,b)で極大
3) $\det(HF)_{(a,b)} < 0 \Rightarrow f$は$(a,b)$で極大でも極小でもない