

第一回熱力学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

問題 1 「熱容量の正定値性」: 温度の経験則として、温度 T_1 物質と温度 $T_2 (< T_1)$ の物質を接触させて、平衡状態に至ると、その平衡状態の温度 T^* は、 $T_2 < T^* < T_1$ を満す。このことから、物質の熱容量の符号は温度に依らず一定であることを示せ。

問題 2 「偏微分と二変数関数の練習問題」: 辺の長さがそれぞれ a, b, c の三角形の面積 S はヘロンの公式より、

$$S = \left(\frac{t}{2} \left(\frac{t}{2} - a \right) \left(\frac{t}{2} - b \right) \left(\frac{t}{2} - c \right) \right)^{1/2}$$

である。ここで t は $t = a + b + c$ で、辺の長さの合計である。 t を一定としたときに、面積 S を最大にする三角形を求めてみる。

1 独立な変数を $a = x, b = y$ とすると、面積 S を最大化することは、

$$f(x, y) = \frac{t}{2} \left(\frac{t}{2} - x \right) \left(\frac{t}{2} - y \right) \left(x + y - \frac{t}{2} \right)$$

を最大化することと同じである。関数 $f(x, y)$ の極値の条件は、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

である。 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ。

2 極値条件を満たし、かつ、三角形の条件を満たす解 (x^*, y^*) を求めよ。

3 その解が極大であることを確認したい。一変数関数 $y(x)$ の極値条件は $dy/dx = 0$ であり、極大条件は $d^2y/dx^2 < 0$ であった。これに相当することを二変数関数 $f(x, y)$ について行う。まず、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ。

4 二変数関数 $f(x, y)$ が (x^*, y^*) において、極大である条件は、ヘッセ行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x^*, y^*)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x^*, y^*)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x^*, y^*)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x^*, y^*)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

の固有値がどちらも負であることである。このことを示せ。

5 関数 $f(x, y)$ の概略を示せ。

問題 3 「講義について」: 講義に関する感想・意見・要望はないか?この講義に期待していることは何か?

レポート提出に際して

ルール：

- A4 レポート用紙で作成し、枚数制限はしないが、裏面は余白として残し、片面にのみ記載されていること。
- レポートの冒頭に氏名と学籍番号、それからレポート作成の時に一緒に悩んだ共同研究者名を明記のこと。
- 締め切りは2週間後。
- 提出先は、16号館221A室、あるいは講義終了時に。

レポート問題の返却：赤を入れて返します。

レポートは共同作業でもいいのかな... よい。普段から友人と議論して、講義で分らなかったことを話をしたりするのは大変有意義なことなので、レポートもその範疇に入ると考える。レポートは試験では無いのだから、何も一人ぼっちで悩むことはない。沢山議論した結果を個人個人でうまくまとめて欲しい²⁴。

レポートは手紙と同じ と思って、提出する時には自分でよく読み直して、意味が通っているかよく確認して欲しい。他人が読むとすぐに混乱するようなレポートは困る。

「式で表すこと」と「絵で描いてみること」 中学生にもわかるように説明するには絵で描いてみせることが大事で、本当に理解できていると、式など使わずに絵で描けるはず。一方で、だれにも正確に情報を伝えるには数学で記述する必要がある。どちらも、大事だということ。レポート問題でも出てきた結果は一度はグラフや絵に描いてみるともっとよくわかることがある。

²⁴ただし、他人のレポートを写してしまうことは、紙(資源)の無駄、作成する時間や採点する時間の無駄であり、お互いの不幸しかもたらさないと心得よ。「悩むことなく作成されたレポート」などほとんど何の役にも立たない。