力学 A 2007 年度過去問解説

何より遅くなってすみません。でも時間がないので先に進みます。まず実際に解きたいやり方で解いて、じっくり考える部分も載せる、という進め方で行きたいと思います。

1.1 極座標

これは基本です。見た瞬間わからなければいけません。

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) \end{pmatrix}$$

細かい導出は教科書解説のファイルを見てください。

1.2 保存力判定

保存力の判定は

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

特に二次元の場合

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0$$

を使います。計算すると $ax - ax = 0$ となって保存力であることが示せます。

ポテンシャルは $\boldsymbol{f}$ の x 成分を x で、または y 成分を y で積分すれば求まります。マイナスを付けるのを忘れないようにしましょう。

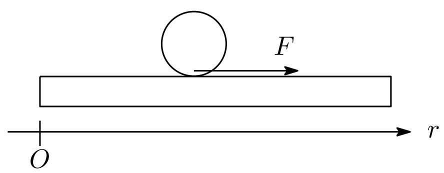
$$U(x, y) = -\frac{1}{2}ax^2y$$

となります。

1.3 相対運動

1.3.1 相対運動方程式

相対運動方程式を使うと比較的楽に解くことができると思います。まず状況を図に設定しましょう。



台から見た人間の相対座標を r、換算質量 $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ を用いて、台と人間の間に働く摩擦力は一定なのでその大きさを F[1] とすれば、人間の相対運動方程式[2] は

$$\mu\ddot{r} = F$$

と書けます。$t = 0$ で $r = \dot{r} = 0$ の初期条件から積分して $r(t)$ を求めると、

$$r = \frac{1}{2}\frac{F}{\mu}t^2 = \frac{1}{2}\frac{M+m}{Mm}Ft^2$$

[1] 本当は動摩擦係数を使って $F = \mu mg$ などと書けるのですが, μ はもう使ってしまったので具体的に書くことはしません。
[2] 台が静止して見える座標から見た運動方程式ということです

となります。この相対座標 r が l になる時刻を t_0などとすれば

$$t_0^2 = \frac{2Mm}{M+m}\frac{l}{F}$$

と求まりました。

一方地面から見た台の運動方程式は

$$M\ddot{r}_{台} = -F$$

です。初速度 0 より、$r_{台}(t)$ も求まって

$$r_{台} = -\frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$$

です。これに $t = t_0$ を代入すると、台の変位が求まって

$$r_{台} = -\frac{1}{2}\frac{F}{M}\frac{2Mm}{M+m}\frac{l}{F} = -\frac{m}{M+m}l$$

となります。答えるのは距離なのでマイナスを外したものになります。

1.3.2 相対運動で考えない場合

人間が相対的に l、床が地面に対して L だけ進んだときの時刻を t_0、人間と台の変位をそれぞれ x、X、速度をそれぞれ v、V などとします。$t = 0$ と $t = t_0$での運動量は保存するので、

$$mv + MV = 0 \qquad \text{（運動量保存則）}$$

が成り立ちます。また変位については

$$vt_0 = x \qquad Vt_0 = L$$
$$l = x - L$$

が成り立ちます。これからまず t_0が

$$t_0 = \frac{M}{M+m}\frac{l}{v} = -\frac{m}{M+m}\frac{l}{V}$$

のように求まって[3]、これより L が

$$L = -\frac{m}{M+m}l$$

と求まりました。これも変位なので、距離にするには絶対値を取りましょう。

1.4 振り子

これは回転運動なので回転運動方程式を立てましょう。慣性モーメントを I、回転角をθ、力のモーメントを N として

$$I\ddot{\theta} = N$$

です。この場合では回転の中心が重心でないので、球の重心回りの慣性モーメント $I = \frac{2}{5}Ma^2$はそのまま使えず、重心が l だけずれた場合の公式

$$I' = I_G + Ml^2$$

を用いて、$I' = \frac{2}{5}Ma^2 + Ml^2$ となります。これを使いましょう。

また、右辺の力のモーメントも「重心の回転」「重心回りの回転」に分けることができました[4]。ここでは重心は糸の先を中心に回転していますが球は重心回りに回転しないので、重心に働く力のモーメントだけを考えれば良いのです。単純に

$$N = -Mgl\sin\theta \fallingdotseq -Mgl\theta$$

となります。回転運動方程式を立てると

$$\left(\frac{2}{5}Ma^2 + Ml^2\right)\ddot{\theta} = -Mgl\theta$$

[3] 符号は適当です
[4] 教科書 p.160 式 (6.68)、教科書解説ファイルでは p.13 の上のほう

これはθに関する単振動の式、「$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$」の形の微分方程式です。この場合角振動数$\omega$と周期$T$は簡単に求まって

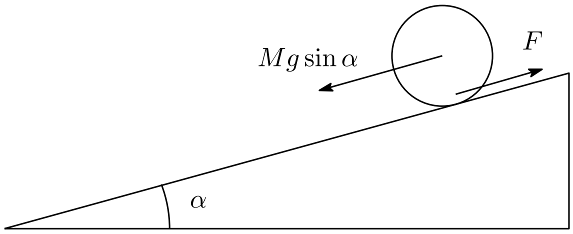
$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{\frac{2}{5}Ma^2 + Ml^2}} = \sqrt{\frac{5gl}{2a^2+5l^2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a^2+5l^2}{5gl}}$$

となります。これが答えですね。

1.5 剛体の回転

これも並進運動と回転運動の方程式を一つずつ立てれば大したことはありません。教科書の p.178 にある例題ではエネルギー保存を使っていますが、なぜそうやっているのかいまいちよくわかりません。素直な考え方で解きます。まず図を描きます。



ここで注意するのは、回転を与える力 F は未知数だということです。滑りがないので F は静止摩擦力であり、力のつり合いから求める必要があります。

並進と回転の方程式は次のようになります。ただし質量は M、慣性モーメントは I としました。

$$M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - F \quad \cdots\cdots ①$$
$$I\ddot{\theta} = Fa \quad \cdots\cdots ②$$

いま未知数は x、θ、F の 3 つなのでもう一つ関係式が要ります。それは滑りがないことによる回転角と変位の関係

$$x = a\theta \quad \cdots\cdots ③$$

です。これで準備がそろったので解いていきます。まずθを消去しましょう。③を二階微分して、②に代入します。

$$\frac{I}{a}\ddot{x} = Fa \quad \cdots\cdots ④$$

そして ① + $\frac{④}{a}$ として F を消去します。

$$\left(M + \frac{I}{a^2}\right)\ddot{x} = Mg\sin\alpha$$

これで x が求まります。$t=0$ で$\dot{x} = x = 0$ の初期条件から

$$x = \frac{1}{2}\frac{Mg\sin\alpha}{M + I/a^2}t^2$$

となります。あとは設問に合わせて I の値を代入します。I の導出法は後で書きます。

(1) 一様な円柱の場合 $I = \frac{1}{2}Ma^2$となって、

$$x = \frac{1}{3}gt^2\sin\alpha$$

です

(2) 中が空洞な円柱の場合 $I = Ma^2$となって、

$$x = \frac{1}{4}gt^2\sin\alpha$$

となります。

1.5.1 慣性モーメントの求め方

円柱の慣性モーメントは円盤のものと等しく $\frac{1}{2}Ma^2$となります。その理由はをちょっと書きます。円柱は円盤の重ね合わせと考えることができて、例えば厚さ 1 の円盤を l 枚重ねた円柱を考えると、慣性モーメントは単純に l 倍になります。同様に質量も l 倍になって、結局円盤と同じになるのです。

実際に計算で求めると次のようになります。図形は $x^2 + y^2 = a^2$、$-l/2 \le z \le l/2$、密度はρとします。

$$I = \int_V \rho(x^2 + y^2)dxdydz$$

であり、円柱座標 (r, θ, z) を用いると、$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$、$z = z$。$dxdydz = (dr)(rd\theta)(dz) = rdrd\theta dz$ となって

$$\begin{aligned}
I &= \int_V \rho r^2 \cdot rdrd\theta dz \\
&= \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr(r^3) \\
&= \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{4}a^4\right) \\
&= \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \left(\frac{1}{2}\pi a^4\right) \\
&= \frac{1}{2}\pi\rho a^4 l
\end{aligned}$$

であり、全質量 $M = \rho\pi a^2 l$ を用いると

$$I = \frac{1}{2}Ma^2$$

一方、中身が空洞の時は半径を微小変化させて考えます[5]。教科書では球殻の慣性モーメントを求めるときにやっていました。

上の円柱の半径を da だけ増やしたときの慣性モーメントの増分を dI とすると、この dI が求める慣性モーメントになります。二つの比は極限で微分になり、

$$\frac{dI}{da} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\pi\rho a^4 l\right) = 2\pi\rho a^3 l$$

$$dI = 2\pi\rho a^3 l da$$

となります。また、質量 M は、大根のかつらむきのように厚さ da、幅 $2\pi a$、高さ l のカーテンのような帯を考えて、

$$M = 2\pi\rho a l da$$

以上より、中身が空洞な円柱の慣性モーメントは

$$I = Ma^2$$

となります。

1.6 最後に

長くなってしまった。そのわりにシケプリ完成してなくてすみません…。

このくらいのレベルならほぼ満点を取ってもらいたいレベルです。おそらく今年はもっと難しいと思うので、教科書の例題レベルの問題のうち、難しめのものをたくさん解いておくと良いと思います。

[5]同じように計算でもできますが同じようなものなので割愛