力学A 2009年度過去問解説

単位を落とすと追試があると言うことで、念のため期末の答えを書いておきます。「追シケ対」という言葉がありますが、そこまでは面倒見られないので自己責任で。

1.1 極座標

これは基本です。見た瞬間わからなければいけません。

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) \end{pmatrix}$$

細かい導出は教科書解説のファイル、または問題集の p.8、p.10 を見てください。

次に面積速度一定ですが、中心力なので力の方位角方向成分 $f_\theta = 0$ となるので、方位角方向の運動方程式は

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

となり、この式は $h = r^2\theta$ が時間的に一定である（時間で微分して 0）ことを表しています。面積速度は $\dfrac{1}{2}rv_\theta = \dfrac{1}{2}r \cdot r\omega = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ で表されるので[1]、面積速度は一定になることが示されました。

1.2 保存力判定

保存力の判定は

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

特に二次元の場合

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0$$

を使います。計算すると

$$-a\sin x \sin y - (-a\sin x\sin y) = 0$$

となって保存力であることが示せます。

ポテンシャルは $\boldsymbol{f}$ の x 成分を x で、または y 成分を y で積分すれば求まります。マイナスを付けるのを忘れないようにしましょう。

$$U(x,y) = a\cos x\cos y + C \qquad (C \text{ は定数})$$

となります。

(3) ですが、「ポテンシャルの差（後 − 前）= 保存力に**逆らってする**仕事」であることを使えば

$$W = -\Big(U(\pi,0) - U(0,0)\Big) = -(-a-a) = 2a$$

と求まります。

また、保存力のする仕事は経路によらないことを考慮した上で、x 軸に沿って質点を動かしたと考えれば

$$W = \int_0^\pi f_x dx = 2a$$

とも求まります。どちらで解いても良いでしょう。

[1] ここの細かい説明は要らない気がします。

1.3 単振動

高校でやったネタかもしれません。中身は東大生なら解いて欲しい内容です。

ただ、「地球の質量が中心に集まったと仮定して良いことの証明」はやるかどうか迷いますが、教科書のやり方が果てしなく面倒で、準備が本番に比べて大変すぎるので省くと考えるのが妥当ではないかと思います。解答の冒頭に「ここで、地球の質量は質点を含む球殻の内部の質量が全て地球の中心に集まったと仮定して良いこととして考える」と注釈を付けておくのが良いでしょう。

では本題に入ります。地球の半径を a、密度をρ、質点の質量を m、万有引力定数を G として、中心からの変位を x とすると、x 方向の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -G\frac{m}{x^2}\left(\rho\frac{4}{3}\pi x^3\right) = -\frac{4\pi\rho Gm}{3}x$$

となります。括弧内はカウントすべき分の地球の質量です。ここから「変位に比例する復元力を受けるから」という理由を書いても良いし、微分方程式を解いて三角関数表示して良いと思います。周期が $2\pi\sqrt{\dfrac{3}{4\pi\rho G}}$ の単振動をします。

1.4 コマの歳差運動

捨て問です。解説は教科書に載っていますが、理解するのが面倒なら他で 80 点稼ぎましょう。

1.5 回転座標

これをすらすら解くには、コリオリ力の理解と回転座標系のしっかりとした知識が必要です。ただ、$\boxed{1}$でやった加速度の極座標表示ができれば解ける形になっています。その際、微分方程式を解いて双曲線関数が出てくるので、経験が無いときついと思います。具体的には、微分方程式

$$\ddot{x} = \omega^2 x$$

について、x の一般解は

$$x = A\cosh(\omega t + \phi) \qquad (A, \phi\text{は初期条件から決まる定数})$$

ということです。これがわかっていれば数学的な準備は終わりです。

では本番で、受ける力は方位角方向だけなのでそれを $F_\theta(t)$ と置いて、動径方向と方位角方向の運動方程式を立てましょう。静止系から見るので慣性力（右辺の補正項）は考えません。また、$\omega = \dot{\theta}$は一定であり、$\ddot{\theta} = 0$ です。

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\omega^2) &= 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ m(2\dot{r}\omega + 0) &= F_\theta(t) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

①式は

$$\ddot{r} = \omega^2 r$$

と変形できて、先ほど説明して微分方程式で、$t = 0$ で $r = a, \dfrac{dr}{dt} = 0$ の初期条件からこれを解くと

$$r = a\cosh\omega t$$

と求まります。特に一階微分は

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \omega a\cosh\omega t$$

となります。

以上と②式より、F は求まって、

$$\begin{aligned} F_\theta(t) &= 2m\frac{dr}{dt}\omega \\ &= 2m\omega^2 a\cosh\omega t \end{aligned}$$

となります。これが答えです。