# 力学 A 教科書内容解説

ひとまず、力学のシケプリなるものです。わかりやすく言えば教科書解説です。高校で力学は学習しているはずなので、本当の基礎は解説しません。また、高校ではやらないことになっている微積による解析も、皆さんならわかると思うので新しく解説することはしません。

表記に関して注意ですが、この資料内ではベクトルはボールド体（$\boldsymbol{a}$など）を使って、時間による微分はドット（$\dot{\boldsymbol{a}}$）を使います。フォントの都合で $\dot{\boldsymbol{p}}$など 少し見にくいところがあるかもしれません…すみません。

## 1　運動

古典力学の考え方としては、その目標は「質点（ないしはそれから成る系）の運動を完全に記述すること」です。初期条件や周りの環境の様子がわかっている場合、粒子の運動はただ一通りに定まります。それを記述するにはまず座標系を用意し、粒子がある場所に存在するとき、その位置をユニークに表せるようにします。さらに任意の時刻 $t$ を与えたときに、粒子の座標がわかるような関数を用意します。一般に粒子の位置は、座標の原点から見た位置ベクトル$\boldsymbol{r}$で表されるので、$\boldsymbol{r}$が $t$ の関数$\boldsymbol{r}(t)$ として表せればいいのです。

位置ベクトル$\boldsymbol{r}$さえわかってしまえば、それを時間微分していくことで速度や加速度が求まります。確かに運動が把握できています。運動について「完全な情報」が得られていることになります。ただ、実際には位置ベクトルが初めから求まるような簡単な場合は少なく、むしろ加速度や速度の方からアプローチし、可能ならそれらを積分して位置を求めたりそれほど位置ベクトルが必要でない場合はエネルギーや運動量など「部分的な情報」から運動の様子を把握することもあります。

## 2　運動の法則

数学に「定義」と「定理」があるように、物理にも「法則」と「公式」があります。前者が「信じようと定めた決まり」であり、後者が「定義から導かれる性質」です。古典力学の場合、運動における法則は三つしかないことに注意しましょう。それらの法則、高校までにたくさん覚えてきた関係式[1]は、全て運動の三つの法則から（しばしば厳しい条件付きで）導かれるものです。

運動における法則は次の三つです。

① 慣性の法則

② 運動の法則（運動方程式）

③ 作用・反作用の法則

それぞれの内容はよくわかっているはずなので省略します。わからなければ教科書などを参照してください。

## 3　運動とエネルギー

### 3.1　運動方程式の変形

ここでは運動方程式「$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$」を変形、積分していきます。上の方の章で「部分的な情報を求める」なんて表現しましたが、これのことです。運動方程式を変形することで得られる関係式には以下の三つがあります。

① 運動量と力積の関係

② エネルギーと仕事の関係

③ 角運動量と力のモーメントの関係

[1] $K = \frac{1}{2}mv^2$とか、$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ とか

①は二章の内容、③は五章の内容ですが、内容的にまとまっていた方がわかりやすいのでここに書きます。さらにそれぞれの変形の仕方を挙げます。

① 両辺を直接積分

② 両辺に速度ベクトルを内積して積分（エネルギー積分）

③ 両辺に左から位置ベクトルを外積して積分

#### 3.1.1 運動量と力積

まず①ですが、ここでは運動方程式を「$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$」のように見ます。ベクトル$\boldsymbol{p}$は運動量といい、一般には質量と速度の積として定義されます。これを $t$ について（ここでは $t_1$から $t_2$まで）積分すれば、関係式

$$\boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt$$

が得られます。左辺は $t_1$から $t_2$までの運動量の変化です。その変化を与えるものとして$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt$ を新しく「力積 ($\boldsymbol{I}$)」として定義します。

例えば力 $\boldsymbol{F}$が一定の時は$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}(t_2 - t_1)$ となったり、$\varDelta t = t_2 - t_1$が非常に小さく $F$ が非常に大きい撃力などを扱う場合でも、積分すればその値は有限の値になります。力積$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt$ は直接求められなくても、運動量の変化から求めることが可能です。

#### 3.1.2 エネルギーと仕事

②について、運動方程式を「$m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = F$」のように見て、両辺に $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ を内積します。

$$m\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) = \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}$であることを用いて、(左辺) $= m\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right)$ となります。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

の両辺を $t$ について ($t_1$から $t_2$まで) 積分することで

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} dt \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となり、左辺には$\dfrac{1}{2}mv^2$というスカラー量の変化量、右辺には積分量を得ます。特に前者を $t_1$から $t_2$までの運動エネルギー $K(t)$ の変化量、後者を $t_1$から $t_2$までに力$\boldsymbol{F}$のした仕事 $W$ と呼びます。

左辺も条件によってはさらに変形することができます。

1. $\boldsymbol{F}$が位置$\boldsymbol{r}$のみの関数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ のとき
   $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$であるので、時刻 $t_1$に地点 $A$、$t_2$に $B$ にあるとすると

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

   さらに、上式で一番右の積分値が経路によらないとき、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ は保存力であるといい、積分の値は地点 $A$ と $B$ のみによって決まります。このときの積分値

$$\int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_O^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} - \int_O^A \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \quad (O\text{ は任意に決められる原点})$$

を位置エネルギーの変化量といい、位置 $X$ における位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）を

$$U(X) = -\int_O^X \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

とします。マイナスを付けたのは、$U$ を運動エネルギーと同じ辺に移項したときに正になるようにです。

また、$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$、$d\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ とすれば、$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ となり、

$$U(X) = -\int_O^X \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

なので、ポテンシャル $U(X)$ を例えば $x$ で偏微分すると、$dy, dz$ は $0$ であるため $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{d}{dx}\left(-\int_0^x F_x dx\right) = -F_x$ となり [2] 力の $x$ 成分が出てきました。$y$ 成分、$z$ 成分も同じように求まって、結局 $U$ から $\boldsymbol{F}$ を求めるには

$$\boldsymbol{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\nabla U$$

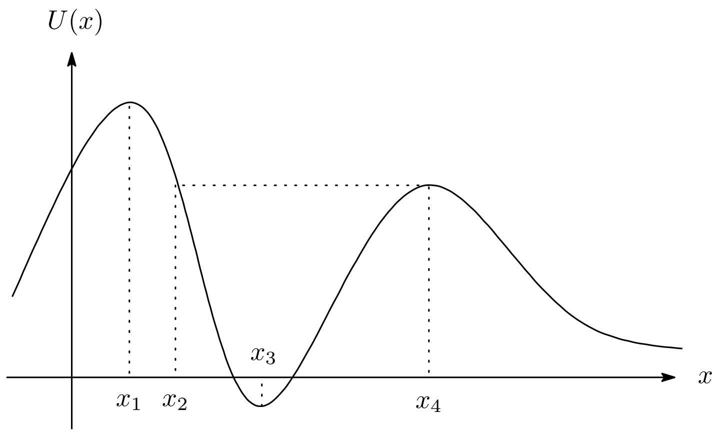
となります。$\nabla$（ナブラ）は単なる記号で、スカラー関数から、$x$ 成分に $x$ による偏微分を持つようなベクトルを作る演算子です。具体的に書けば $\nabla \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ ということです [3]。

話が脱線した気がしますが、質点に保存力（重力とか、静電気力とか、万有引力とか）しか働かない場合は、①式の右辺は負符号のポテンシャルエネルギー $-U$ と初期条件から決まる積分定数 $E$ のみが現れ、$U$ 左辺に移項することで

$$K + U = E$$

というよく知られた力学的エネルギー保存則が導かれます。

また、運動が一次元なら曲線で $U(x)$ のグラフを表現することができますが、質点をある点 $X$ から初速度 $0$ で離したとき、その後の運動はグラフから簡単かつ明快に予測することができます。具体的には、ポテンシャルのグラフをなめらかな平面と見なして、その上に乗った質点の運動を考えればよいのです。




- $x_2 < X < x_4$ のとき　$x = x_3$ で最大速度となる周期運動。特に $x_3$ 近傍なら単振動に近似できる。
- $x_4 < X$ のとき　次第に速度を増しながら $x \to \infty$ へと飛んでいく
- $x_1 < X < x_2$ のとき　$x = x_3$ で最大速度になった後、$x_4$ で速度は最低になり、その後は速度を増して $x \to \infty$ へ飛んでいく

[2] $x$ が二箇所に出てきますが、微分と積分で違うものと思ってください…。
[3] 本当はベクトル関数に対して回転や発散を求めることにも用いられますが、ここでは省略します。

2. $\boldsymbol{F}$が $t$ によらない定ベクトルのとき

この場合は簡単で、①式の右辺は$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dt=\boldsymbol{F}\cdot\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{v}dt=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=Fs\cos\theta$（$\boldsymbol{s}$は変位ベクトル、$\theta$は$\boldsymbol{F}$と$\boldsymbol{s}$のなす角）となり、これはよく知られた仕事の求め方です。

3. 一次元の運動で、$\boldsymbol{F}=F$ が原点からの変位 $x$ の一次関数のとき

これは 1 の場合の特別な例ですが、フックの法則に従うバネや、力を一次近似したときの単振動のときに対応するので特別に説明します。

まず $F(x)=-kx$（$k$ は定数）としておきます[4]。すると $-U(x)$ は$\displaystyle\int(-kx)dx=-\frac{1}{2}kx^2$のように求まり、力学的エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

のようになります。$v$ と $x$ を時間的に変化する変数として、上の式を変形すると

$$\frac{x^2}{2E/k}+\frac{v^2}{2E/m}=1$$

となり、楕円の形で表せました。図は教科書の p.49 にありますが、運動を視覚的に捉えることができるようになります。

また、上の式を $v=\dfrac{dx}{dt}$ について解くと

$$v=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2E}{k}-x^2}$$

となります。$2E/k=a^2$として、$x=a\cos\theta$と置いてみると、$v=\dfrac{dx}{dt}=-a\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}$となることから

$$\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

と表せます。なので、$\dfrac{d\theta}{dt}>0$ のときに限りますが、$\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega$とすると、$\dot{\theta}=\omega$、$\theta=\omega t+\alpha$（$\alpha$は積分定数）となり、

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}+\alpha\right)$$

と完全解が求まりました。二回積分をしたので、確かに積分定数は $E$ と$\alpha$の二つになっています。どちらも初期条件から求まり、$a=\sqrt{\frac{2E}{k}}$が振幅、$\alpha$は初期位相を表しています。

### 3.1.3　角運動量と力のモーメント

③について、運動方程式を「$\dot{\boldsymbol{p}}=F$ のように見て、両辺の左から$\boldsymbol{r}$を外積します。

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}}+\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p}$であることを用いて[5]、（左辺）$=\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})-\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p}$となります。また、第二項 $\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{v}\times(m\boldsymbol{v})=m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$ となる[6]ので、上の式は、

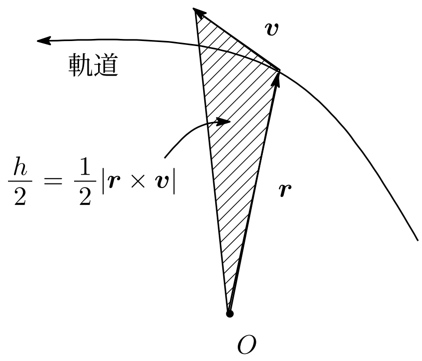
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

となります。右辺の被微分量 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{L}$を角運動量といい、その意味は簡単に言えば「回転運動の勢い」です。角運動量ベクトルの向きは回転の向きを示すことができますが、回転そのものの向きとは関係がありません。さら

[4] このような力を復元力ともいいます
[5] 外積の微分でも、積の微分のように連鎖律が成り立ちます。証明は成分計算なので省略
[6] 平行なベクトルの外積は零ベクトル

に左辺の$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{N}$を力のモーメントといい、これそのものは高校でもおなじみの量です。しかしこれもベクトルになっていて向きを持ちます。

角運動量や力のモーメントが向きを持つのが理解を難しくしている要因ですが、「質点が回転する際に、回転方向に回した右ねじが進む向きに生じる仮想的な量」として理解しておけば困らないかもしれません。もちろんもっと細かい性質もありますが…。同一平面上の簡単な回転運動の場合は、もっぱらそれらの大きさだけが問題になります。その身近な例が惑星運動の面積速度一定の法則（ケプラーの第二法則）です。惑星に中心力しか働かない場合、$\boldsymbol{r}\parallel\boldsymbol{F}$となり、$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$であり、上の方程式の右辺が$\boldsymbol{0}$になります。つまり、左辺の$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})$ は時間的に一定であることになります。ここで $h=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|=rv\sin\theta$は、高校でやった面積速度の二倍の量です。外積を知らないうちに面積速度と言われてもあまりイメージもわかなかったかもしれませんが、角運動量として外積で定義すると少しわかりやすくなる…かもしれません。



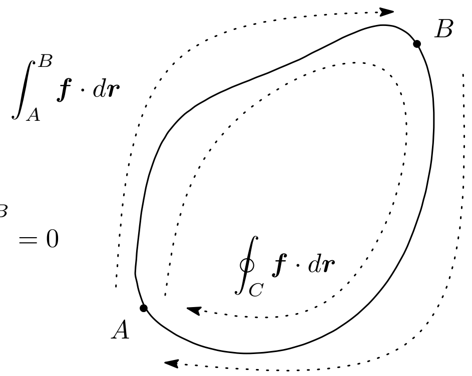

## 3.2 保存力の判定

保存力の定義は、ポテンシャル $U$ がわかっているとき

$$\boldsymbol{f}=-\nabla U$$

のように表されました。またこの定義は「積分値$\displaystyle\int_A^B\boldsymbol{f}(r)\cdot d\boldsymbol{r}$が始点と終点 $A,B$ のみによって決まり、経路によらない」と同値です。経路によらないということは、任意の閉曲線に沿った線積分 $\displaystyle\oint_C\boldsymbol{f}(r)\cdot d\boldsymbol{r}$を計算したとき、その値は 0 になります（下図参照）。

$$\oint_C\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_A^B+\int_B^A=\int_A^B-\int_A^B=0$$




$$\int_B^A\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_A^B\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

しかし線積分は一般に計算がしにくいものです。そこで、さらにこれと等価な値 $\nabla\times\boldsymbol{f}$が$\boldsymbol{0}$になることを用いて$\boldsymbol{f}$が保存力であることを判定します。

等価性は多分冬学期の電磁気でやると思いますが、「回転定理（ストークスの定理）」というものによります。この定理の詳しい証明は省きますが、内容は、微小平面 $da$ について、大きさがその面積に等しく、向きがその面に垂直で外向きなベクトルを「面ベクトル」$d\boldsymbol{a}$として定めると、上の閉曲線に囲まれた面全体で、3.1.2 で出てきた $\nabla$ と$\boldsymbol{f}$の外積 $\nabla\times\boldsymbol{f}$を積分したもの $\left(\displaystyle\int_S(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{a}\right)$ が、先ほどの線積分 $\displaystyle\oint_C\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$と等しくなるというものです[7]。

$$\oint_C\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{a}\qquad\text{(ストークスの定理)}$$

[7] あまり深く考えずに、こんなものがあるという程度にしておいてください

まあこんなものはどうでも良いとして、$\nabla \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$が何なのかを解説します。先ほどの $\nabla$（ナブラ）の定義から、$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ でした。これと$\boldsymbol{f} = (F_x, F_y, F_z)$ の外積を考えれば良いので

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

となります。外積の計算が危ない人はこの機会に覚えておきましょう。このベクトルが $\boldsymbol{0}$になるということは

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

ということです。これは$\boldsymbol{f}$が三次元ベクトルの場合で、二次元の場合では $\nabla \times \boldsymbol{f}$はもっと簡単に表せて

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

となるため、条件式は 1 つで、

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

となります。

例えば、平面上の点 $(x, y)$ にある質点に働く力が

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} axy \\ \frac{1}{2}ax^2 \end{pmatrix}$$

であるとすると、$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}ax^2\right) = ax$、$\frac{\partial}{\partial y}(axy) = ax$ であるため、$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$ となって、この力は保存力であることがわかります。特にこの力によるポテンシャルは、$y$ を固定して $x$ で $F_x$を積分することにより、$U(x, y) = -\frac{1}{2}ax^2y$ と求まります。

また、ポテンシャルは重ね合わせが可能です。保存力$\boldsymbol{F}_1$と$\boldsymbol{F}_2$によるポテンシャルをそれぞれ $U_1$、$U_2$とすると、合成力$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ について、

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial (F_{1x} + F_{2x})}{\partial y} - \frac{\partial (F_{1y} + F_{2y})}{\partial x} = \left( \frac{\partial F_{1x}}{\partial y} - \frac{\partial F_{1y}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial F_{2x}}{\partial y} - \frac{\partial F_{2y}}{\partial x} \right) = 0$$

となるので、$\boldsymbol{F}$も保存力となり、そのポテンシャルを $U$ とすると、

$$U = -\int F_x dx = -\int (F_{1x} + F_{2x}) dx = -\int F_{1x} dx - \int F_{2x} dx = U_1 + U_2$$

となり、確かに重ね合わせができています。

## 4　惑星の運動と中心力

この教科書では惑星の運動の解析が非常に詳しく書いてあります。ティコ=ブラーエの観測したデータからケプラーは惑星についての三つの法則を考え出していました。それに対してニュートンは、運動に関する三つの法則と万有引力の法則を提案し、惑星の動きからも万有引力の法則は正しく、逆にそれらの法則からケプラーの法則が導ける、つまり宇宙の運動が支配できることを証明しました。これによって古典力学の正当性が証明されたといっても過言ではなく、この教科書でこれだけ大きく取り上げられているのも納得できる話です。

この章で取り扱っているのは三つです。

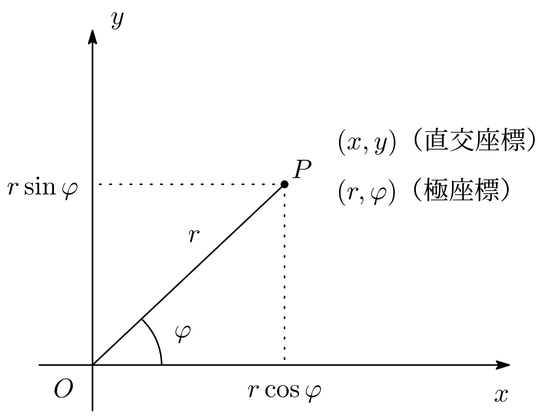
① ケプラーの法則から太陽の引力の式の証明

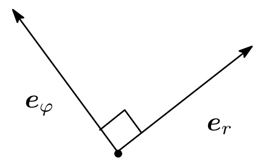
② 太陽の引力からケプラーの法則の証明

③ 上の二つに必要な知識

①と②は教科書で非常に良く説明されていて、それ以上ここで書いても何にもならないので教科書を読んでください。ここでは③の知識の説明をします。

### 4.1 極座標における運動方程式




極座標の基底ベクトル

上図のように平面における極座標を導入します。

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

と変換されるのは周知の通りです。これについて、運動方程式を考えてみましょう。具体的には、$x$ 方向と $y$ 方向ではなく、$r$ 方向（動径方向）と $\varphi$ 方向（方位角方向）に分解して運動を考えます。その理由は、万有引力などの中心力は動径方向のみに働く力であり、その方向で考えた方が運動がわかりやすくなるからです。

ではまず、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$の時間微分を考えてみるのですが、その際に**基底ベクトル**というものを使うことになります。これは座標の方向を表す単位ベクトルです。例えば直交座標で$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$はそれぞれ $x, y, z$ 方向を向いた単位ベクトルであることは教科書でもよく使われています。ここでは動径方向の単位ベクトル$\boldsymbol{e}_r$と方位角方向の単位ベクトル$\boldsymbol{e}_\varphi$を用いて、ベクトル$\boldsymbol{A}$を

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{e}_r + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

のように分解します。言葉で説明すれば$\boldsymbol{A}$の $r$ 方向成分が $A_r$、$\varphi$ 方向成分が $A_\varphi$ということです。例えば $A$ が中心力$\boldsymbol{f}$の場合は $f_\varphi = 0$ となります。

ここで注意しておかないといけないのは、$xy$ 直交座標では基底ベクトルを微分すると$\boldsymbol{0}$になっていたのですが、極座標での基底は微分しても$\boldsymbol{0}$にならないということです。その理由は、$r$ 方向、$\varphi$ 方向というのは時間と共に変化するもので、動く座標を扱っているからです。$xy$ 直交座標の場合は、座標が動くことはありませんでした。ここが少しややこしいところです。

具体的には、$\boldsymbol{e}_r$と$\boldsymbol{e}_\varphi$を直交座標の基底$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}(= \boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y)$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \cos\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \sin\varphi\cdot\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\varphi &= -\sin\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \cos\varphi\cdot\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

と表されます。なので、それらを微分すると$\left(\dfrac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \boldsymbol{0}\text{と、合成微分に注意する}\right)$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = -\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\cdot\boldsymbol{i} + \cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\cdot\boldsymbol{j} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\cdot\boldsymbol{i} - \sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\cdot\boldsymbol{j} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r$$

のようになります。これは覚えておくべき関係式です。極座標をいじるときには絶対に使います。

さて、以上のことに注意して極座標の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r + 0 \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$ を微分し、速度ベクトルを表します。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r \\ &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \end{aligned}$$

となります。これが極座標による速度表記です。さらに、これを時間微分することで加速度を表します。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi \\ &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi - r\dot{\varphi}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi \end{aligned}$$

最後の一行は余計といえば余計な作業ですが、この後で重要な意味を持ってくるので一応変形しておきました。これが極座標による加速度の表記です。これでようやく極座標の運動方程式を書くことができます。

$$\text{（動径方向）}\qquad m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = f_r \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\text{（方位角方向）}\qquad m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = f_\varphi \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

これが極座標で分解した運動方程式です。左辺は絶対に覚えておいてください。中心力を扱うときはこの形の方がとても都合が良いのですが、その理由をこれから説明します。

まず、中心力なので $f_\varphi = 0$ です。なので、③式は

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0$$

となります。これは $r^2\dot{\varphi}$が保存する（時間的に一定である）ことを示していますが、それが持つ意味は「面積速度一定の法則」です。これが面積速度であることの細かい説明は教科書のp.94 にあるので参照してください。以降 $r^2\dot{\varphi} = h$ は特別な値としてちょくちょく出てきます。

次に、②式について考えます。これは動径方向の運動方程式であり、

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= f + mr\dot{\varphi}^2 \\ &= f + mr\omega^2 = f + m\frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

のように見ると、右辺第二項はよく知られた遠心力を表す項であることがわかります。$r$ が一定である等速円運動の場合は、左辺 $= 0$ となり、円運動の方程式

$$m\frac{v^2}{r} = -f$$

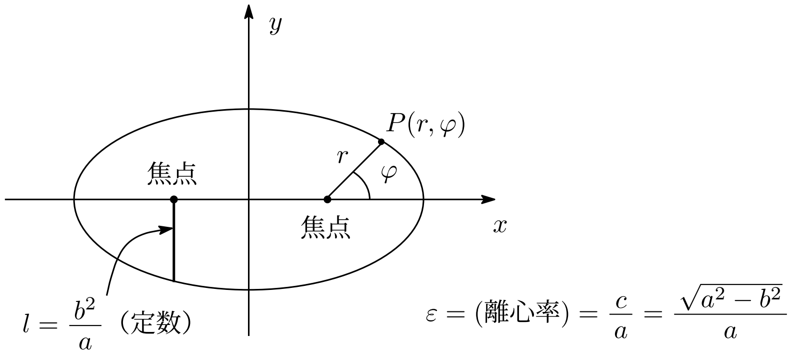
または円運動する座標から見たつり合いの式

$$0 = f + m\frac{v^2}{r}$$

が導かれます。②式はそれをもっと一般化した（$\dot{r} \neq 0$ の場合も考えている）方程式であるということができます。

## 4.2　二次曲線の極座標表示

これは教科書の解説がわかりやすいので、要点をまとめておくだけにします。




焦点を原点とするような極座標を取ると、楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は

$$r=\frac{b^2}{a+c\cos\varphi}=\frac{l}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

と表せます。これは導出法（p.87〜）も含めて丸暗記しておきましょう。中心力が働く惑星を扱う際には極座標を使った運動の表示が簡潔でわかりやすいので、この表示にもお世話になります（特に教科書の 4-4、4-5)。

楕円の式の $+$を $-$ に変えると双曲線の式になります。「斥力ポテンシャルによる散乱」でちょっと使いますが、そこまで重要なわけではないので紹介程度にしておきます。

## 4.3 球状物体のポテンシャル

- 球状物体から受ける万有引力は、その中心に全質量が集中したものと同等である。
- 球状物体の内部では、外側の分の引力は打ち消しあうため、内側のみの引力を考えれば良い。

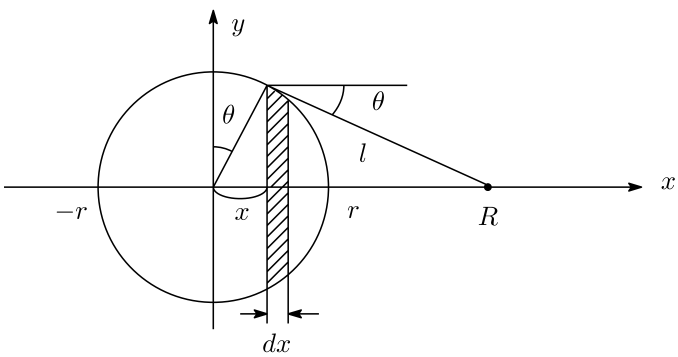
これは非常に重要な定理であり、地球内単振動を考える際に用いられたりします。証明は教科書の通りにしても良いし、授業でやったようにしても良い[8]ですが、もう少し簡潔な（理解しやすい）方法を紹介しておきます。
以降単純に計算が進みます。

密度$\rho$、半径 $r$ の球殻を考えます。その中心からの距離が $R$ の位置にある質量 $m$ の粒子が受ける力を

① $R>r$　（粒子が球殻外にあるとき）

② $R<r$　（粒子が球殻内にあるとき）

に分けて考えます。結論としては、①のときは $F=-G\dfrac{Mm}{R^2}$、②のときは $F=0$ となります。




[8]シケ対の自分でもあれを理解しきれていないのが事実です…

まず、色々と文字を設定します。球殻の中心から $x$ のところにある、幅 $dx$ で切り取った帯（上図斜線部）を考えます。帯の実際の幅は、$\dfrac{dx}{\cos\theta}$ となることに注意しましょう。そして、その質量は

$$\rho \cdot 2\pi r \cos\theta \cdot \frac{dx}{\cos\theta} = 2\pi r dx$$

となります。左辺は (密度) $\cdot$ (帯の長さ) $\cdot$ (帯の幅) です。

次は粒子との距離について。斜線で示した帯上の点は全て粒子と等距離 $l$ のところにあります。図から三平方の定理より

$$l^2 = (R-x)^2 + (r\cos\theta)^2$$

ですが、再び図より $(r\cos\theta)^2 = r^2 - x^2$ であるので、結果として

$$l^2 = (R-x)^2 + (r^2 - x^2) = R^2 + r^2 - 2Rx$$

となります。

したがって、質点が帯部分から受ける万有引力の $x$ 成分をを $dF_x$とすると、

$$\begin{aligned} dF_x &= -G\frac{2\pi r dx \cdot m}{l^2}\frac{R-x}{l} \\ &= -Gm\frac{4\pi\rho r^2}{2r}\frac{R-x}{(R^2+r^2-2Rx)^{3/2}}dx \\ &= -G\frac{Mm}{R^2}\frac{R^2}{2r}\frac{R-x}{(R^2+r^2-2Rx)^{3/2}}dx \qquad (4\pi\rho r^2 = M\text{（全質量）とした}) \end{aligned}$$

であり、これを $x=-r$ から $x=r$ まで足し合わせると、左辺は球殻から受ける全引力の $x$ 成分が出ます。しかし対称性から力は $x$ 方向にしか働かないと考えることができるので、これが全引力に一致します。

右辺の $\dfrac{R^2}{2r}$ 以降の足し合わせは積分で表され、その計算を追っていくことにします。

$$\frac{R^2}{2r}\int_{-r}^{r}\frac{R-x}{(R^2+r^2-2Rx)^{3/2}}dx$$

について、被積分関数の分母 $R^2+r^2-2Rx$ を $t$ と置くと、分子は

$$R - x = R - \frac{R^2+r^2-t}{2r} = \frac{R^2-r^2+t}{2r}$$

と表せて、積分区間は $x : -r \to r$ のとき $t : (R+r)^2 \to (R-r)^2$。変数変換について、$-2Rdx = dt$ となります。

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{2r}\int_{-r}^{r}\frac{R-x}{(R^2+r^2-2Rx)^{3/2}}dx &= \frac{R^2}{2r}\int_{(R+r)^2}^{(R-r)^2}\frac{R^2-r^2+t}{2R}\frac{1}{t^{3/2}}\frac{dt}{-2R} \\ &= -\frac{1}{8r}\int_{(R+r)^2}^{(R-r)^2}\left\{(R^2-r^2)t^{-3/2} + t^{-1/2}\right\}dt \\ &= -\frac{1}{8r}\left[-2(R^2-r^2)t^{-1/2} + 2t^{1/2}\right]_{(R+r)^2}^{(R-r)^2} \\ &= -\frac{1}{4r}\left[-(R^2-r^2)\left\{\frac{1}{|R-r|} - \frac{1}{|R+r|}\right\} + (|R-r| - |R+r|)\right] \end{aligned}$$

と計算できました。次に [ややこしい式] の中を場合分けで計算していきます。

① $R > r$ のとき

$$-\frac{1}{4r}[\text{省略}] = -\frac{1}{4}[-2r-2r] = 1$$

となるから、

$$F = -G\frac{Mm}{R^2}$$

② $R < r$ のとき

$$-\frac{1}{4r}[\text{省略}] = -\frac{1}{4}[2R-2R] = 0$$

となるから、

$$F = 0$$

これで一応証明ができました。円は球殻の重ね合わせであるため、中身が詰まっている場合は球殻の重ね合わせと考えればいいのですが、どの球殻を持ってきても同じ結果になるので、球であっても粒子の内側にある部分は全て球の中心に集まったとみなして良く、粒子の外側にある部分は合力が 0 になります。

# 5 角運動量

本題は三章の解説で書いてしまったので、ここでは三重積のまとめだけ書いておきます。

## 5.1 スカラー三重積

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

として、$\boldsymbol{A} \cdot \big(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}\big)$ について考えます。まず計算してしまうと

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_2C_3 - C_3B_2 \\ B_3C_1 - C_3B_1 \\ B_1C_2 - C_1B_2 \end{pmatrix} \\
&= A_1(B_2C_3 - C_3B_2) + A_2(B_3C_1 - C_3B_1) + A_3(B_1C_2 - C_1B_2) \\
&= B_1(C_2A_3 - A_3C_2) + B_2(C_3A_1 - A_3C_1) + B_3(C_1A_2 - A_1C_2) = \boldsymbol{B} \cdot \big(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}\big) \\
&= C_1(A_2B_3 - B_3A_2) + C_2(A_3B_1 - B_3A_1) + C_3(A_1B_2 - B_1A_2) = \boldsymbol{C} \cdot \big(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\big)
\end{aligned}$$

となります。次に大きさについて。$|\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}| = BC \sin\theta$から、この値は$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$によって作られる平行四辺形の面積を表しています。さらに $|\boldsymbol{A} \cdot \big(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}\big)| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}| \cos\varphi$ であり、この値は $|\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}|$ と、$\boldsymbol{A}$の$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$に垂直な成分の大きさの積です。つまり、$|\boldsymbol{A} \cdot \big(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}\big)|$ は$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$によって作られる平行六面体の体積を表します。

## 5.2 ベクトル三重積

これもいるかわかりませんが公式だけ

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

証明は教科書で。…さすがに手抜きかな ?

# 6 質点系の力学

運動を解析する際に、扱う粒子の量が増えてくると運動方程式の連立数も多くなり、解くのは極めて難しくなってきます。そのときのために、複数の粒子から成る系について成り立つ関係式を求めておきます。

扱う関係式は大きく分けて三種類です。ここでは紹介と軽い説明をします。詳しい証明は教科書を参照してください。全体として「まあ…当たり前の結果じゃね ? 」と思うようなことが書いてありますが、ちゃんとした理解を持って「当たり前」と言えるようにしておいてください。

## 6.1 運動量と力の関係

まず、ある $j$ 番目の粒子についての運動方程式 $m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \boldsymbol{F}_j + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{k,j}$を用意します。ここで$\boldsymbol{F}_j$は $j$ 番目の粒子に働く外力で、$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{k,j}$は、$k$ 番目の粒子から $j$ 番目の粒子に働く力（内力）を、$k$ について足し合わせたものです。つまり内力の総和のことです[9]。

[9] 本当は $k = j$ の時は除いて考えるのですがわざわざ表記するのが面倒なのでこのまま書きます。

これを $j$（全ての質点）について足し合わせれば、

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{k,j}$$

となります。左辺は $\sum m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum m_j \dfrac{\sum m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j}{\sum m_j}$ と変形することができて、複数の粒子から成る系の重心を $r_G = \dfrac{\sum m_j \boldsymbol{r}_j}{\sum m_j}$、系の全質量を $M = \sum m_j$のように定義すれば、左辺は全体で $M\ddot{\boldsymbol{r}}_G$となり、全質量と重心の加速度の積になります。

また、右辺第一項は外力の和なのでまとめて $\sum \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}$と表します。第二項は作用・反作用の法則から合計が$\boldsymbol{0}$になります。結局、系全体の運動方程式は

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_G = \boldsymbol{F}$$

となり、重心の運動を見る際にはその加速度と系全体に働く外力の和を考えればいいということになります。

$\sum m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum m_j \dot{\boldsymbol{v}}_j = \sum \dot{\boldsymbol{p}}_j$のように見ると、系全体の運動量$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}_j$で表現した運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

のように見ることもできます。

## 6.2 運動エネルギー

$j$ 番目の質点の位置ベクトル$\boldsymbol{r}_j$を、重心の位置ベクトルと、重心から見た相対的位置ベクトルの和で表します。それを次のように書きます。

$$\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}'_j \qquad \text{（微分すると}\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}'_j\text{）}$$

そして、系全体の運動エネルギー $\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}m_j(\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}'_j)^2\right)$ を展開して整理すると

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\left(\sum m_j\right)\boldsymbol{v}_G^2 + \frac{1}{2}\left(\sum m_j \boldsymbol{v}_j'^2\right) \\ &= \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2 + \frac{1}{2}\left(\sum m_j \boldsymbol{v}_j'^2\right) \\ &= K_G + K' \end{aligned}$$

となり、全体の運動エネルギーは「重心の運動エネルギー（マクロに見た運動エネルギー）」と「内部運動のエネルギー」に分けて考え、足し合わせれば良いということになります。

## 6.3 角運動量

角運動量も同様で、結果を書いてしまうと

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{L}'$$

となり、全体の角運動量は「重心の角運動量（大きな回転）」と「重心周りの角運動量（細かい回転）」に分けて考えればいいということです。教科書 p.159 に地球の自転と公転のわかりやすい例が書いてあるので参照してください。

さらに角運動方程式は、重心に作用する力のモーメント $\boldsymbol{N}_G = \boldsymbol{r}_G \times \sum \boldsymbol{F}_j$ と、重心周りのモーメントの総和 $\boldsymbol{N}' = \sum\left(\boldsymbol{r}'_j \times \boldsymbol{F}_j\right)$ を用いて、二つの連立方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{N}_G$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \boldsymbol{N}'$$

で表すことができます。これが効果を顕すのはどちらかのモーメントがゼロになるようなときです。重心が回転していないときは重心周りのモーメント（下式）だけを考えれば良く、重心だけが書いてしている（と見なせる）ような場合は上の方程式を考えればいい、というように使えます。

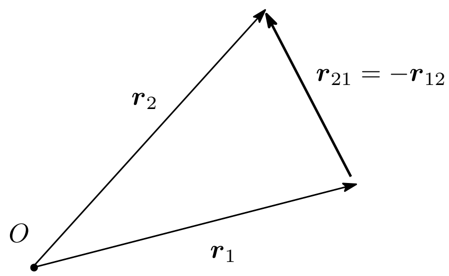
### 6.4　2 体問題

大学入試の際には様々なところでお世話になった 2 体問題です。二つの物体が内力だけを受けながら運動する場合を考えます。例えば互いに引力を及ぼしながら回転する惑星[10]とか、衝突問題[11]、三角台、バネでつながった二物体等々応用の幅は広いです。出題される理由は、ちゃんと物理がわかっていないと訳がわからなくなりやすい問題だからです。この教科書では親切なことにこの分野を体系的（何故か中心力しか扱っていませんが）に解説してあります。

まず、2 体問題は (i) 重心運動と (ii) 相対運動に分けて考えると比較的簡単に解けます。それぞれの物体の座標を $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、質量を $m_1$、$m_2$として重心の座標を$\boldsymbol{r}_G = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$ とすると、上で説明したとおり重心の運動は外力によって決まり、今は外力がゼロの場合を考えているので

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_G = 0 \qquad \boldsymbol{v}_G = \text{（一定）（静止/等速直線運動）}$$

となります。さらに、物体 1 から見た 2 の相対座標 $\boldsymbol{r}_{21} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$を 用意し、相対運動を考えます。




それぞれの運動方程式は

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_{21} \qquad \cdots\cdots ④$$
$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_{12} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となります。$\boldsymbol{F}_{21}$は物体 2 から物体 1 に働く力（内力）です。上式に $m_2$、下式に $m_1$を掛けて、⑤ − ④とすると

$$m_1m_2(\ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1) = m_1\boldsymbol{F}_{12} - m_2\boldsymbol{F}_{21}$$

となり、両辺を $m_1 + m_2$で割って、作用・反作用の法則から$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$であることに注意して変形すると

$$\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\boldsymbol{r}}_{21} = \boldsymbol{F}_{12}$$

これを相対運動方程式と呼びます。ここで、$\dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2} = \mu$を**換算質量**といい、相対運動で片方（ここでは物体 1 ）を固定した座標から見た際のもう片方（物体 2）の運動を表す運動方程式を書くときに、質量に当たるものとして使われます。

例えば $\boldsymbol{F}$が万有引力である場合は $F_{21} = -G\dfrac{m_1m_2}{|\boldsymbol{r}_{21}|^2}$ となり、物体 1 と 2 がバネでつながっている場合、バネの自然長を $l$ とすれば $F_{21} = -k(|\boldsymbol{r}_{21}| - l)$ となります。

さらに、$\boldsymbol{r}_G$と$\boldsymbol{r}_{21}$の式から

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}_{21}$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}_{21}$$

と表すことができます。これが持つ意味は、「重心から 2 つの物体の運動を見たとき、それらは**向きが正反対**で**質量の逆比の速さ、距離**で運動しているように見える」ということです。

例えば、バネでつながれた二つの物体（$m_1$、$m_2$）が重心は静止したまま単振動しているときについて。自然長からの最大の伸びを $L$ とすると、重心から見ると質量 $m_1$の物体は振幅$\frac{m_2}{m_1+m_2}L$ の単振動、質量 $m_2$の物体は振幅$\frac{m_1}{m_1+m_2}L$ の単振動をするということになります。

---

[10] いつかの東大入試の$\boxed{1}$で出ましたね。
[11] 京都の過去問にややこしいのがあった気がします。

ちょっと一般論で話しすぎた感があってわかりにくかったかもしれませんが、相対運動で考えると簡単になる場合がたまに出てくると思うので、その際に理解を深めてもらえると良いと思います。

相対運動で考えると得な例題を載せておきます。

物体 1（質量 $m_1$、初速度$\boldsymbol{v}_1$）と物体 2（質量 $m_2$、初速度$\boldsymbol{v}_2$）が自然長 $l$ のバネでつながれている。$t=0$ での物体の初速度は先に示したとおりで、バネの長さは $l_0$であった。このとき、バネの長さの最大値 $l_{max}$を求めよ。ただし運動は一直線上で起こるものとする。

（略解）エネルギー保存で考えます。相対運動方程式

$$\mu \ddot{x}_{21} = -k(x_{21} - l)$$

の両辺に $\dot{x}_{21}$を掛けて右辺を移項すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu v_{21}^2 + \frac{1}{2}k(x_{21} - l)^2\right) = 0$$

であり、$t=0$（$v_{21} = v_2 - v_1$、$x_{21} = l_0$）から $x_{21} = l_{max}$となる時刻まで積分すると（エネルギー積分）

$$\frac{1}{2}\mu(v_2 - v_1)^2 + \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2 = \frac{1}{2}\mu(0)^2 + \frac{1}{2}k(l_{max} - l)^2$$

$l < l_{max}$に注意して $l_{max}$について解くと

$$l_{max} = l + \sqrt{\frac{\mu}{k}(v_2 - v_1)^2 + (l_0 - l)^2} = l + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{(v_2 - v_1)^2}{k} + (l_0 - l)^2}$$

※相対運動のエネルギー保存を使わないと、$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 = v_G$(相対速度 0）となる時刻と $t=0$ での運動量保存から $v_G$を求めて、$x_{21} = l_{max}$の時刻と $t=0$ でのエネルギー保存

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2 = \frac{1}{2}m_1 v_G^2 + \frac{1}{2}m_2 v_G^2 + \frac{1}{2}k(l_{max} - l)^2$$

から求めることになりますが、明らかにこっちの方が面倒です。まあこういうときには便利だということを覚えておけばどこかで役に立つ…かも、というレベルの話ではありますが。

# 7　剛体の簡単な運動

剛体は、大きさや形が変わらない物体のことを言います。その運動を考えるわけですが、運動を記述するのに必要な変数は 6 つです。

どういうことかというと、まず剛体の代表点（例えば重心）の空間座標を記述するために 3 つの変数が要ります。$xyz$ 直交座標だったら $(x, y, z)$ の 3 つです。さらに剛体はある軸の周りを回転することができます。どの軸を中心に回転するかを決定するのに 2 つの変数が要ります。教科書では $(\theta, \varphi)$ の二つを用いています。そして、その軸の周りにどれだけ回転しているかを表す変数として $\psi$ を用います。これでようやく剛体の運動の様子が全て記述できたことになります。記述には変数が 6 つ（$x, t, z, \theta, \varphi, \psi$）必要で、このことを**剛体の自由度は 6 である**といいます。

座標についての 3 つの変数は、そのまま位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の成分になり、重心の位置ベクトルと剛体に働く合力$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i$の因果律として運動方程式

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

が与えられています。これはそれぞれの成分で独立な三つの方程式です。さらに回転については、剛体全体の角運動量 $\boldsymbol{L} = \sum(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i) = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$ と剛体に働く全ての力のモーメント $\boldsymbol{N} = \sum(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix}$ を用いた回転運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

があります。これも 3 つの独立な方程式で、運動方程式と合わせて 6 つの関係式が得られました。変数が 6 つと関係式が 6 つで、あとは適切な初期条件が得られれば、力から剛体の運動は完全に予言することが可能になります。

例えば、剛体に働く力の合力 $\boldsymbol{F}$が 0 である場合には、剛体の重心は静止または等速度運動を続けます。しかし $\boldsymbol{F} = 0$ であっても $\boldsymbol{N} = \sum(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_i) \neq 0$ である場合があって、そのときは剛体は回転の変化という運動をします。このような場合の力を特に**偶力**と言ったりします。逆に、$\boldsymbol{N} = 0$ であっても $\boldsymbol{F} \neq 0$ であるときは、回転は変化しないまま並進運動の速度を変えながら運動します。

重心の並進運動についてはこれまでやってきた質点の運動と何ら変わりはないので問題ないはずです。ここでは回転運動の記述について考えてみましょう。

## 7.1 並進運動が無く、回転軸が固定されている場合

いわゆる固定軸回転です。焼き鳥を串を中心に回したりする感じです。ここでの変数はたったの 1 つになってしまいます。運動を記述するには一方向（ここでは $z$ 方向を使います）の回転運動方程式があれば十分です。

$$\frac{d}{dt}\left(\sum(r_i \cdot m_i v_i)\right) = \sum r_i F_i \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

$v_i$ と $F_i$ はどちらも位置ベクトルとの直交成分であることに注意しましょう。ここでは全体が角速度 $\omega$ で回転しているとすると、$v_i = r\omega$ と書くことができて、左辺の括弧内にある角運動量（の $z$ 方向成分）は

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega$$

と書くことができます。特に $\omega$ を除いた $\sum m_i r_i^2$ の部分は時間的に変化しないため、その値を $I$ と置くと⑥式は

$$I\frac{d\omega}{dt} = \sum r_i F_i$$

と書けます。$I$ は物体に固有の値であり、回転の変化しにくさを表す指標として**慣性モーメント**と呼ばれます。

固定軸回転を扱う場合、「慣性モーメントと角速度の時間変化率の積が力のモーメントの総量に等しい」という式を立てれば良いわけです。また、回転角を $\varphi$ などとすれば、$\omega = d\varphi/dt$ であり、角運動方程式は

$$I\ddot{\varphi} = N_z$$

となります。

この方程式にもエネルギー積分を考えることができます。両辺に $\dot{\varphi} = \omega$ を掛けて変形すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) &= \sum F_i r_i \omega \\ &= \sum F_i v_i = \sum P_i \quad \text{（仕事率の合計）} \end{aligned}$$

となり、両辺を適当な区間で積分すると

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = W_{\text{回転方向}} + C$$

となります（$C$ は積分定数）。左辺は回転の運動エネルギーです。理由を書いておくと

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\sum(m_i v_i^2) \\ &= \frac{1}{2}\sum(m_i r_i^2 \omega^2) = \frac{1}{2}\sum(m_i r_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \end{aligned}$$

また、$W_{\text{回転方向}}$ とは、外力が回転を促す（打ち消す）方向にした仕事の総量です。それ以外の方向には剛体が固定されているので、仕事は常に 0 です。

### 7.2　慣性モーメント

慣性モーメントの求め方を紹介しておきます。定義式より

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

でしたが、これは剛体を構成する全ての粒子について $m_i r_i^2$ を足し合わせるということです。$m_i$ は粒子の質量、$r_i$ は回転軸からの距離です。

ですが値は積分を用いて求められるのが普通です。密度が $\rho$ で一定の剛体について

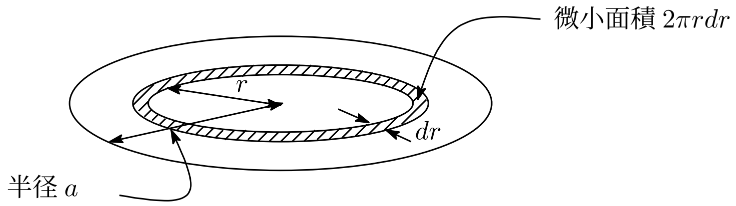
$$I = \int_V \rho(x^2+y^2)dxdydz$$

$$I = \int_V \rho r^2 dv$$

などのように表されます。$m_i$ の代わりに $dm = \rho dxdydz = \rho dv$（$dxdydz = dv$ は微小面積要素を表します）、$r_i$ の代わりに $\sqrt{x^2+y^2}$ が使われています。それらの積を、剛体をなす空間 $V$ について積分するという記号です。下の式ではさらに簡潔に書いています。密度が一様でない場合は、$\rho$ が位置の関数 $\rho(\boldsymbol{r})$ として与えられますが、計算が面倒になるだけで本質的な違いはありません。

試しに幾つかの剛体について慣性モーメントを求めてみることにしましょう。

① 半径 $a$ の 薄い円盤の中心周りの慣性モーメント




円盤の積分を扱うときは定石と言える方法で、中心から $r$ の位置にある幅 $dr$、長さ $2\pi r$ の帯を考えて、$r=0$ から $r=a$ まで積分します。$dm = 2\pi\rho rdr$ と考えることができます。

$$\int_0^a 2\pi\rho rdr \cdot r^2 = \frac{1}{2}\pi\rho a^4$$

全質量 $M = \pi\rho a^2$ を用いて

$$I = \frac{1}{2}Ma^2$$

② 半径 $a$ で密度が一様な球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の $z$ 軸周りの慣性モーメント 位置 $(x,y,z)$ にある微小体積 $dv = dxdydz$ を持ってきて考えます。慣性モーメントは

$$\int_V \rho(x^2+y^2)dxdydz$$

と表せます。ここで球座標 $(r,\theta,\varphi)$ を導入すると[12]、座標は

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

と変換され、微小体積は

$$\begin{aligned} dv &= dxdydz \\ &= r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \end{aligned}$$

[12]詳しくは授業解説の方を見てください…といってもそっちもあまり詳しくないかもしれませんが

となるので、積分値は

$$\int_V \rho(r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)r^2\sin\theta drd\theta\ d\varphi = \int_V \rho r^4\sin^3\theta drd\theta d\varphi$$

となります。積分区間（$r:0\to a$、$\theta:0\to\pi$、$\varphi:0\to 2\pi$）に注意して積分計算すると

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi(\rho r^4\sin^3\theta) \\ &= \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta(2\pi\rho r^4\sin^3\theta) \\ &= \int_0^a dr\left(\frac{8}{3}\pi\rho r^4\right) \\ &= \frac{8}{15}\pi\rho a^5 \end{aligned}$$

のようになります。全質量 $M=\rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi a^3$を用いて

$$I = \frac{2}{5}Ma^2$$

球は教科書と違ったやり方で求めてみました。球座標の置き換え以外に特殊な発想が要らないやり方です。

重心を通る回転軸を、$h$だけ平行移動させた別の回転軸を中心とする場合の慣性モーメントは、重心周りの慣性モーメント $I_G$を用いて

$$I' = I_G + Mh^2$$

と表せます。どこで使うかわかりませんが、猫の足を回す際に使ったので一応紹介しておきます（証明は教科書）。

# 8 相対運動

## 8.1 始めに

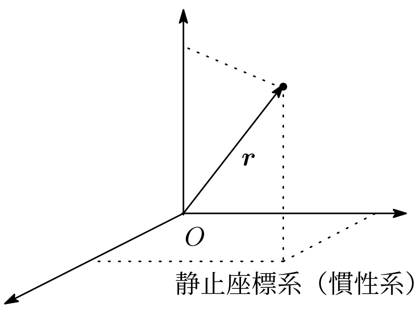
この章で説明されているのは、運動の観測をする座標の取り扱いについてです。普通は運動を慣性系（= 慣性の法則が成り立つ座標系）で見ますが、実際には地球が自転している影響で正確な意味で完全な「慣性系」というものはなかなか存在しません。

慣性系でないとどのようなことが生じるか。それは**慣性力**と呼ばれる見かけの力が働いているように見えるのです。いわば、非慣性系で運動の法則を成り立たせるための補正項です。この章では慣性力の取り扱いについての説明がメインになってきます。

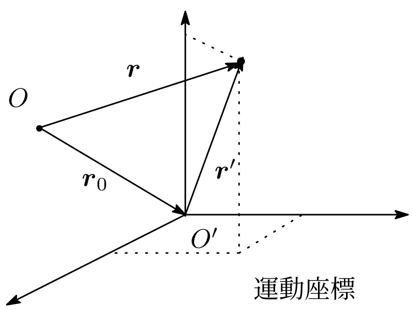
まず前提を少し説明します。これ以降は **静止座標系**と**運動座標系**から見た質点の運動を取り扱い、静止座標の原点から見た質点の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$、運動座標の原点から見た質点の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}'$（ダッシュ付き）で表します。また、静止座標の原点から見た運動座標の原点の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_0$とします。速度$\boldsymbol{v}$と加速度$\boldsymbol{a}$についても同様に定めます。位置ベクトルについて次の関係が成り立ちます。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'$$

イメージとしては下のような図を考えてみると良いかもしれません。




静止座標系（慣性系）




運動座標

また、運動には**並進運動**と**回転運動**があります。運動座標系が並進運動している際に、その加速度に応じた慣性力 $\boldsymbol{F} = -m\boldsymbol{\alpha}$ が働くのは高校で高校でやったとおりです。なので並進運動についてはここではあまり触れません。問題になってくるのは回転運動で、これを中心に説明します。

そして最終的には、地球上が厳密には慣性系でないことから生じる特殊な運動（ナイルの放物線やフーコー振り子など）を定量的に理解できるようにしていきます。

## 8.2 座標変換

あれだけ前提を書いておいてあれですが、ここでは**静止している二つの座標**の間の変換について考えます。ここでは基準となる座標での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$、ずれた座標での位置ベクトルを$\boldsymbol{r}'$とします。

さて、基準平面座標での位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$を、基準から $x$ 方向に $p$、$y$ 方向に $q$ だけ平行移動した座標から見たときの位置ベクトル$\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$を考えます。これは簡単で

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$$

と変換されます。

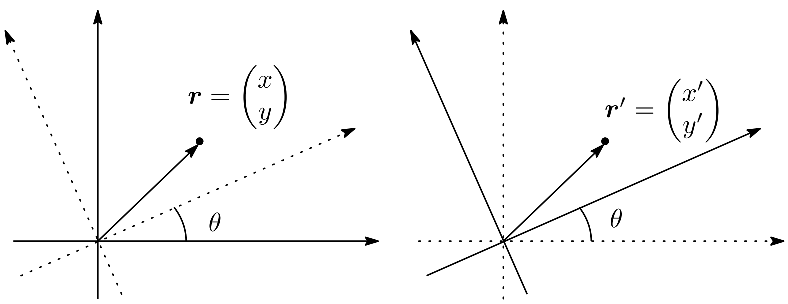
次にずれた座標の原点が基準と同じで、$\theta$だけ回転している場合を考えましょう。座標が$\theta$だけ回転しているということは、基準座標での位置ベクトルを$\theta$だけ回せば表すことができるので、回転行列を使うことで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

つまり、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

となります。




二次元の場合は変数が 1 つなのでこのように簡単に変換できます。しかし三次元になると同じ回転の変換でも変数が 3 つに増えるため、一気にややこしくなります。具体的にはオイラー角と呼ばれる 3 つの角 $(\varphi, \theta, \psi)$ を用いて三段階を経て変換します。使う行列は $z$ 軸$\varphi$ 回転の$\tilde{A}$、その後 $y$ 軸$\theta$回転の$\tilde{A}'$、最後に $z$ 軸$\psi$回転の $A'$です。二回目以降は変換後の $x, y, z$ 軸を中心に回すのでややこしくなります。

それぞれを成分表示すると次のようになります。

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

まとめるのは面倒ですが、計算すると一応まとまるので、三次元の $(\varphi, \theta, \psi)$ 回転を表す行列 $A = \tilde{A}\tilde{A}'A'$は次のようになります。

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & \cos\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi \\ -\cos\theta\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

## 8.3 同一平面内で等速回転する座標で働く慣性力

さて本題です。ですがここでは平面内の回転と運動のみを考えます。原点は慣性系のものと常に一致していると考えます。メリーゴーラウンドの上で動き回る感じです。

慣性系では運動方程式が成り立つので外力を $\boldsymbol{F}$として、$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$、成分表示すれば

$$m\ddot{x} = F_x$$

$$m\ddot{y} = F_y$$

が成り立っています。

運動系ではそう簡単にはいかず、$\boldsymbol{r}'$についての運動方程式は、慣性力$\boldsymbol{F}_0$によって修正されて

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F}' + \boldsymbol{F}_0$$

となります。$\boldsymbol{F}'$は運動系から見た外力です[13]。さらに $x'$方向と $y'$ 方向に分けて成分表示すると

$$m\ddot{x}' = F_{x'} + F_{0x'}$$

$$m\ddot{y}' = F_{y'} + F_{0y'}$$

のようになります。この際の $F_{0x'}$ と $F_{0y'}$ を求めようというわけです。

角速度が $\omega$ で等速回転している場合は、座標変換と同じ考え方で

$$\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ -x\sin\omega t + y\cos\omega t \end{pmatrix}$$

であり、逆に

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \end{pmatrix}$$

となります。この両辺を二階微分します。合成微分に注意して長いですがやってみます。まず一階微分して

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\dot{x}' - \omega y')\cos\omega t - (\dot{y}' + \omega x')\sin\omega t \\ (\dot{x}' - \omega y')\sin\omega t - (\dot{y}' - \omega x')\cos\omega t \end{pmatrix}$$

もう一度微分して整理すると

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x')\cos\omega t - (\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y')\sin\omega t \\ (\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x')\sin\omega t + (\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y')\cos\omega t \end{pmatrix}$$

となります。

一方、慣性系から見た外力 $\boldsymbol{F}$も $x'$と $y'$方向に変換すると、位置ベクトルと同じように

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x'}\cos\omega t - F_{y'}\sin\omega t \\ F_{x'}\sin\omega t + F_{y'}\cos\omega t \end{pmatrix}$$

のようになります。以上の関係式を慣性系での運動方程式に代入して整理すると、

$$(m\ddot{x}' - 2m\omega v_{y'} - m\omega^2 x' - F_{x'})\cos\omega t - (m\ddot{y}' + 2m\omega v_{x'} - m\omega^2 y' - F_{y'})\sin\omega t = 0$$

$$(m\ddot{x}' - 2m\omega v_{y'} - m\omega^2 x' - F_{x'})\sin\omega t + (m\ddot{y}' + 2m\omega v_{x'} - m\omega^2 y' - F_{y'})\cos\omega t = 0$$

の二式が得られます（途中で $\dot{x}' = v_{x'}$、$\dot{y}' = v_{y'}$ と置きました）。任意の $t$ についてこれが成り立つということは、$\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の係数が全て常に 0 であることと同値で、それによって 2 つの関係式

$$m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega v'_y + m\omega^2 x'$$

$$m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega v'_x + m\omega^2 y'$$

[13]回転系から見ると、定ベクトルも回転しているように見えたりします。なので普通は $\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{F}'$です。

が得られます。これが求めたかった運動系での運動方程式です。右辺の第二項と第三項が補正項であり、慣性力です。

さらにベクトル表示をします。右辺第二項が問題ですが、$z$ 方向を向いた大きさ$\omega$のベクトル$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$を回転ベクトルとして用意すれば、

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega v_{y'} \\ \omega v_{x'} \\ 0 \end{pmatrix}$$

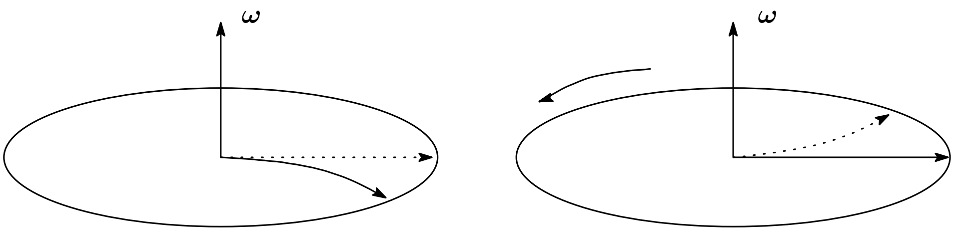
となって表すことができます。つまり

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F}' - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}') + m\omega^2 \boldsymbol{r}'$$

これが回転している座標での運動方程式のベクトル表記です。

右辺第三項は遠心力であり、よく知られた力です。位置ベクトルと同じ向き、つまり回転中心から遠ざかる向きを向いていて、その大きさは $mr\omega^2 = m\dfrac{v^2}{r}$ です。

一方第二項は**コリオリ力**と呼ばれ、回転している座標で動いている物体に働いて見える力です。外力と遠心力が働かない特殊な場合を想定して、図を使って見てみましょう。




回転系　　　　静止系

上の図では、点線が想像している進路、実線が実際の進路です。まず右の静止系から見ると、質点は外力を受けないために真っ直ぐ進んでいます。これは何ら問題ありません。しかし回転系から見ると、やはり外力がないので真っ直ぐ進むはずが、何らかの力で進路が曲げられ、思っているよりも右側にたどり着いてしまいました。これをコリオリ力の作用だと見なすわけです。

それを再び静止系（外界）から見ると右のようになります。回転系では真っ直ぐと思っていた進路が静止系から見ると曲がっているので、その通りに進むことができないというわけです。

他の特徴としては、コリオリ力$\boldsymbol{F}^{(C)} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}')$ は外積で定義されるので、回転軸方向と、回転系から見た速度ベクトルのどちらにも垂直です。座標が回転していても相対速度$\boldsymbol{v}'$が無いと働かないことにも注意しましょう。

## 8.4 複雑な回転をする座標で働く慣性力

前の節では角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$は $z$ 方向を向いた定ベクトルであるとしました。今度はその向きや大きさが変わる場合を考えましょう。さらに、運動座標の原点が慣性座標の原点に対して並進運動している場合も考えます。後者の方はおまけのようなもので、最後に慣性力の項 $-m\ddot{\boldsymbol{r}}_0$が付くだけです。

### 8.4.1 相対導関数

さて、これを説明する際には一つ面倒なことがあって、回転している座標でのベクトルの微分です。運動系から見たベクトル $\boldsymbol{A}$を用意して、その微分を考えます。ここでは基底を使った表示が都合が良いので

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3$$

と表します。ここで問題なのは、基底ベクトル $\boldsymbol{e}$ が変化していくので、単純に成分を微分するわけにいかない、つまり

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{pmatrix}$$

とはならないことです。実際に微分すると

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \left(\frac{dA_1}{dt}\boldsymbol{e}_1 + \frac{dA_2}{dt}\boldsymbol{e}_2 + \frac{dA_3}{dt}\boldsymbol{e}_3\right) + \left(A_1\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} + A_2\frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} + A_3\frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

となります。前半の括弧内が相対的に見た際の微分、すなわち基底（= 座標軸）が動かない場合の微分です。なの で、それを$\boldsymbol{A}$の**相対導関数**というように呼びましょう。座標が動いていようがいまいが、その座標から見た$\boldsymbol{A}$の導関数[14]です。

後半の括弧内は、基底が変わる（座標が回転している）ことによる補正項です。これはいまいち正体がつかめません。ただ、ベクトルであるということはわかっているので、基底$\boldsymbol{e}$を用いて表してみることにしましょう。

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} = \omega_{11}\boldsymbol{e}_1 + \omega_{12}\boldsymbol{e}_2 + \omega_{13}\boldsymbol{e}_3 \qquad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} = \omega_{21}\boldsymbol{e}_1 + \omega_{22}\boldsymbol{e}_2 + \omega_{23}\boldsymbol{e}_3 \qquad \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} = \omega_{31}\boldsymbol{e}_1 + \omega_{32}\boldsymbol{e}_2 + \omega_{33}\boldsymbol{e}_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

このように、9 つの変数$\omega_{11}$から$\omega_{33}$を用いてひとまず表してみました。

次に条件式です。基底ベクトルの大きさが 1 であることから $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1$ などの三つ、それぞれが直交していることから$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$ などの三つがありますが、それらを微分して関係式を出します。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 \cdot \frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} &= 0 &\qquad \boldsymbol{e}_1 \cdot \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} + \frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{e}_2 &= 0 \\
\boldsymbol{e}_2 \cdot \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} &= 0 &\qquad \boldsymbol{e}_2 \cdot \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} + \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} \cdot \boldsymbol{e}_3 &= 0 \\
\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} &= 0 &\qquad \boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} \cdot \boldsymbol{e}_1 &= 0
\end{aligned}$$

の以上六つです。このことから未知変数は三つになるはずなのでやってみましょう。まず、左列の三式から

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$$

がわかります。さらに右列の三式から

$$\omega_{12} + \omega_{21} = 0 \qquad \omega_{23} + \omega_{32} = 0 \qquad \omega_{31} + \omega_{13} = 0$$

がわかります。そこで、$\omega_{12} = \omega_3$、$\omega_{23} = \omega_1$、$\omega_{31} = \omega_2$ と新しく決めて関係式⑧を書き直すと

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} = \omega_3\boldsymbol{e}_2 - \omega_2\boldsymbol{e}_3 \qquad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} = \omega_1\boldsymbol{e}_3 - \omega_3\boldsymbol{e}_1 \qquad \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} = \omega_2\boldsymbol{e}_1 - \omega_1\boldsymbol{e}_2$$

となり、⑦式の後半括弧内は

$$\begin{aligned}
A_1(\omega_3\boldsymbol{e}_2 - \omega_2\boldsymbol{e}_3) + A_2(\omega_1\boldsymbol{e}_3 - \omega_3\boldsymbol{e}_1) + A_3(\omega_2\boldsymbol{e}_1 - \omega_1\boldsymbol{e}_2) &= (\omega_2A_3 - \omega_3A_2)\boldsymbol{e}_1 + (\omega_3A_1 - \omega_1A_3)\boldsymbol{e}_2 + (\omega_1A_2 - \omega_2A_1)\boldsymbol{e}_3 \\
&= \begin{pmatrix} \omega_2A_3 - \omega_3A_2 \\ \omega_3A_1 - \omega_1A_3 \\ \omega_1A_2 - \omega_2A_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

と表すことができました。ここでの $\boldsymbol{\omega}$も回転ベクトルと呼ぶことができ、物体が$\boldsymbol{\omega}$を軸にして、$|\boldsymbol{\omega}| = \omega$の角速度で回転していることを表します。その向きは、回転方向に回した右ねじが進む向きです。教科書のp.213 に図が載っているのでそれを見ると少しわかりやすいかもしれません。

以上より、回転ベクトル $\omega$で回転している座標でのベクトルの微分ができました。$\boldsymbol{A}$の相対導関数を$\dfrac{d^*\boldsymbol{A}}{dt}$のように書けば

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d^*\boldsymbol{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

となります。これは $\boldsymbol{A}$ が位置ベクトルであっても、速度ベクトルであっても、回転している座標から見たものであれば何でも成り立ちます。

[14] $\boldsymbol{A}$が相対位置ベクトルならその相対速度、$\boldsymbol{A}$が相対速度ならその相対加速度

### 8.4.2 働く慣性力を求める

ようやく本題です。でも後は計算するだけなので、過程を理解してもらえば良いと思います。

慣性系から見た質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}' \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$

というように表されました。ここで $\boldsymbol{r}_0$ は運動座標の原点で、並進運動しているものとしています。また $\boldsymbol{r}'$ は運動座標系での質点の位置ベクトルで、運動座標は回転ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているものとします。$\boldsymbol{\omega}$ は定ベクトルとは限りません。時間的に変化しています。

ここで、慣性系では運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

が成り立っているものとします。

ではひとまず⑩式を微分してみましょう。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$

ここで注意しないといけないのは、回転系での微分です。上の式で $\dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$ は回転系での微分なので、先ほどの関係式⑨が成り立ちます。つまり、

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \frac{d^*\boldsymbol{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$$

となります。運動系から見た速度 $\boldsymbol{v}'$ は $\dfrac{d^*\boldsymbol{r}'}{dt}$ になります（つまり上式右辺第一項 $= \boldsymbol{v}'$ です）。

では $\dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$ をさらに微分してみましょう。これも回転系でのベクトルなので、⑨の式によります。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\right) &= \frac{d^*}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\right) + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} \\
\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt} &= \frac{d^*}{dt}(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \\
\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt} - \frac{d^2\boldsymbol{r}_0}{dt} &= \frac{d^*\boldsymbol{v}'}{dt} + \frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d^*\boldsymbol{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \\
\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_0 &= \boldsymbol{a}' + \frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}' + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑪
\end{aligned}$$

ひとまずまとめられるところはまとめてみました。$\dfrac{d^*\boldsymbol{v}'}{dt} = \boldsymbol{a}'$ を使いました。左辺もちょこちょこいじっていますが、⑩式を二階微分して代入しただけです。

さらに、$\dfrac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt}$ について、ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が回転しているとしても、これを微分すると

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} = \frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{0}$$

となるので、$\boldsymbol{\omega}$ の微分は座標系によらず $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ と表せます [15]。

以上より、⑪式に $m$ を掛けて $m\boldsymbol{a}'$ の式にすると、

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0 - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}') - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}')$$

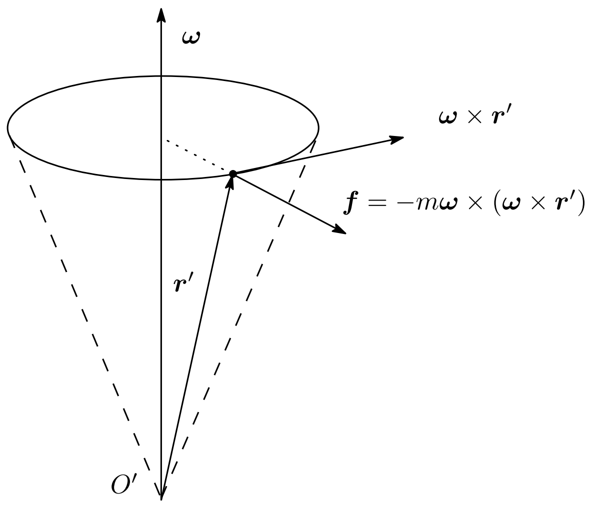
となりました。これが求めたかった運動系での方程式です。

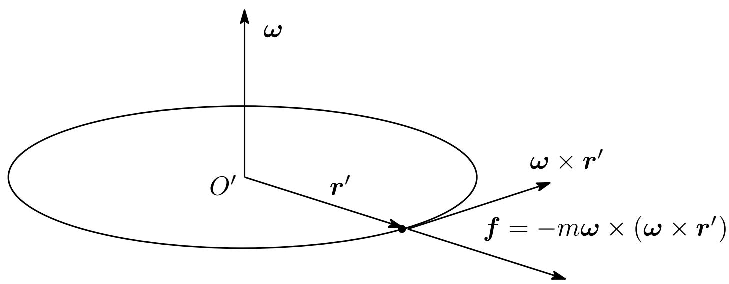
右辺の力を一つずつ見ていくと、第一項は外力、第二項は原点が並進運動することによる単純な慣性力、第三項はコリオリ力、第四項は少し見にくいですが遠心力を表しています。そして最終項は回転が変化することによって受けるように見える慣性力です。

[15] 回転系で見た $\boldsymbol{\omega}$ の微分も、慣性系から見た $\boldsymbol{\omega}$ の微分も同じということです。

① 遠心力 $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r'})$

特徴は、$\boldsymbol{\omega}$に垂直だということです。さらにベクトル三重積の公式を使うと、$\boldsymbol{\omega}$と$\boldsymbol{r}'$の二つのベクトルと同一平面にあることがわかります。特に$\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}'$のとき、その大きさは $mr^2\omega$となります。また、大きさは回転の半径（ $=\boldsymbol{r}'$の$\boldsymbol{\omega}$に垂直な成分 $=$ 下図の円錐の底面半径）が大きいほど大きくなります。これは感覚的に理解しやすいのではないでしょうか。



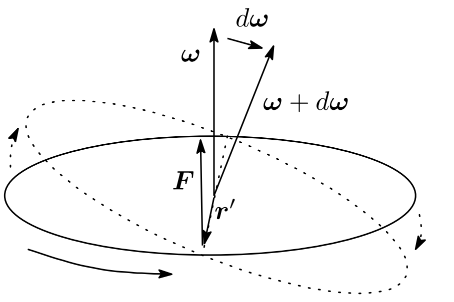




$\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}'$ のとき

② 回転の変化による慣性力 $-m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}')$

これは式を見ただけではわかりにくいですが、簡単なレベルなら実感があるはずです。角速度の大きさだけが小さくなる、つまり $d\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\omega}$で$\dot{\omega}<0$ のときに、回転を続ける方向に体がひっぱられて「おっとっと」となるやつです。逆に回転が加速する（$\dot{\omega}>0$）ときは取り残される方向に引っ張られる力です。

$d\boldsymbol{\omega} \nparallel \boldsymbol{\omega}$の時はイメージしにくいですが、下の図を見てもらえるとちょっとわかるかもしれません。もしくは富士急に行ってピザっぽいのに乗った方が手っ取り早いかも。浮き上がるような力を受けるように感じるらしいです。




## 9　最後に

ひとまず終わりです。これを読んで物理がわかるようになって好きになってもらえたらいいなーというつもりで書きました。教科書をなぞった程度になってしまったところもありますが（特に後半）、一応教科書よりは丁寧に書いてみたつもりです。

あと、特に前半に多いですが、河合塾の某苑田大先生の授業内容を参考にさせてもらったところがあります。気づいた人もいるかもしれませんが見逃してください。先生と、綺麗な字で五冊にもなる授業ノートを貸してくれた方には本当に感謝します。先生のおかげで大学合格しました。ありがとうございます。…ん、ちょっと違うか。

この資料から何か得られたものがあれば幸いです。試験勉強頑張りましょう。

2009 年度入学理科一類 31 組　松本卓也