力学（火 2）授業内容解説

1　単振り子

角度 θ が微小なとき、角度方向についての運動方程式

$$m\ddot{\theta} = -\omega^2\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立てば、その角度の時間変化は単振動であり、$\theta = A\cos(\omega t - \phi_0)$ と表せることは高校の範囲内です。その証明について、「時間変化が cosine で表せる $\Longrightarrow$ 運動方程式 (1)」は、両辺の二階微分を求めれば容易に求まります。

一方、運動方程式から軌跡を導くことは高校でやっていないはずです。ここではそれを証明します。

後半では、角度 θ が微小でないときの誤差を考えて、どのようなときに「微小」と呼べるのかを考察します。

1.1　運動方程式から軌道を求める

概略としては、運動方程式をエネルギー積分して速度と変位の関係を出し、さらにもう一度積分することで完全解を出します。

$|\theta| << 1$ としたとき、単振り子の運動方程式は

$$m\ddot{\theta} = -\frac{mg}{l}\theta = -m\omega^2\theta$$

と表せます。ここでは式の見やすさのために $\frac{g}{l} = \omega^2$ としました。また、m は両辺共通なので省略し、$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ の形で考えます。

これの両辺に $2\dot{\theta}$ を掛けると

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -2\omega^2\dot{\theta}\theta$$

となり、（左辺）$= 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \dfrac{d}{dt}(\ddot{\theta}^2)$、（右辺）$= -2\omega^2\dot{\theta}\theta = \dfrac{d}{dt}\left(-\omega^2\dot{\theta}^2\right)$、であることを考えると、両辺を t で積分することにより

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\dot{\theta} + C = -\omega^2\dot{\theta} + 2E$$

となります[1]。C は一般に積分定数ですが、その値は初期条件によってどのようにでも置けるので、ここでは $2E$ としました[2]（E は全エネルギー）。これが少しテクニカルです。

そしてこれを $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ について解くと、

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{2E - \omega^2\theta^2} \\ dt &= \frac{d\theta}{\sqrt{2E - \omega^2\theta^2}} \end{aligned}$$

のようになります。これをさらに両辺積分するのですが、わかりやすいように「$E = 2\omega^2k^2$、$\theta = 2kz$」のように置換を行います。ここで k は定数ですが z は変数で、$d\theta = 2kdz$ が成り立ちます。

$$dt = \frac{2kdz}{\sqrt{4\omega^2k^2 - 4\omega^2k^2 \cdot z^2}} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

[1] このように、運動方程式に変位の一階微分を掛けて積分することを「エネルギー積分」と呼びます。それによって出てくる値がをエネルギーと定義するのです。

[2] 授業では $2E$ としてますが、後からさらに置き換えるので、単に E としても大丈夫な気がします。

右辺の z の式は、$\arcsin z$ を微分したものです。逆に $\arcsin z$ の微分が上のようになるのは重要な公式ですね。これで積分が簡単にできるようになったということで、両辺を積分します。ただし、初期条件は $t=0$ で$\theta=z=0$ とします。

$$t=\frac{1}{\omega}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\omega}(\arcsin z)=\frac{1}{\omega}(\sin^{-1}z)$$

これは、$\omega t=\sin^{-1}z$ であることを表しています。なので、この等式の両辺の正弦（sine）を取れば

$$\begin{aligned} z &= \sin\omega t \\ \theta &= 2k\sin\omega t \end{aligned}$$

となります。これで、運動方程式から単振動の三角関数表示の式が導けたことになります。

1.2　角度が微小でない時を考える

角度が微小でないとき、$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ が成り立たないので、運動方程式は

$$m\ddot{\theta}=-\frac{mg}{l}\sin\theta=-m\omega^2\sin\theta$$

のようになります。ここでも同じように m を除いて $2\dot{\theta}$ を掛けて積分します。右辺が $-\omega^2\sin\theta\cdot 2\dot{\theta}=\dfrac{d}{dt}(2\omega^2\cos\theta)$ となることに注意します。

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= 2\omega^2\cos\theta+C \\ &= 2\omega^2\cos\theta+(2E-2\omega^2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ &= 2E-2\omega^2(1-\cos\theta) \\ &= 2E-2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ dt &= \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{2E-2\sin^2(\theta/2)}} \end{aligned}$$

やや急いで変形しました。二行目 (2) では、積分定数が自由に選べることを利用して、下の変形がうまくいくように C を定めました。

ここで再び変数の変換を行います。これは「こうしておけば上手くいく」という天下り的なものですが、昔の人は偉いので許してあげましょう…。「$E=2\omega^2k^2$、$\sin(\theta/2)=kz$」と置きます。すると $2kdz=\cos(\theta/2)d\theta$ であり、

$$\omega dt=\frac{2kdz}{\cos(\theta/2)\sqrt{4\omega^2k^2-4(kz)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{1-(kz)^2}}$$

となるので、同じように初期条件（$t=0$ で$\theta=0$）を定めて $t=0$ からある時刻 t_0 まで積分すると、

$$\begin{aligned} \omega t &= \int_0^{t_0}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-(kz)^2)}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ &= sn^{-1}(z,k) \end{aligned}$$

ここで、$sn(z,k)$ はヤコビの楕円関数の一つで、k を母数（モジュラス）とする z の関数です。内容は難しいですが、これは定義なので「なるものはなる」程度に理解しておいてください。左辺が楕円関数の逆関数になっているということです。つまり

$$z=sn(\omega t,k)$$

となり（上式の両辺を楕円関数に代入した）

$$\begin{aligned} \sin\frac{\theta}{2} &= kz \\ &= ksn(\omega t,k) \end{aligned}$$

となります。これで一応単振り子の軌道が「解けた」ことになります。

しかし、これではまるで「軌道を表すために新しく関数を定義した」ようです。つまり、単振り子の軌道は例えば「$f(単振り, t)$」と表せる、と「あっそ」としか言いようがない逃げ方をしていることになります。

これでは意味がないので、以上の議論から部分的な情報を求めてみましょう。ここでは周期を導くことにより、振幅が「微小」とはどのようなときかを考えてみます。

(3) 式で、$z = \sin\phi$ と置き換えをします。$d\phi = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dz}{\cos\phi}$ であることに注意すると、

$$t = \frac{1}{\omega}\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

となりました。ここで t を T（周期）と置き換えたいのですが、そのためにはどうすればよいでしょうか。右辺は ϕ_0の関数ですが､ϕ_0がどのような値を取ると周期とつなげられるかを考えます。

z は先ほど $\sin(\theta/2) = kz$ として導入されました｡θは鉛直下向きから右回りに測った振り子の振れ角です。では T とθの関係はどうかというと､θが 0 から初めて最大になるまでの時間が $T/4$ で与えられます｡$\theta = 0$ のとき $z = \sin\phi = 0$､$\phi = 0$ であり､θが最大のとき $z = \sin\phi$も最大となり､$\phi = \pi/2$ となります[3]。なので、$\phi = 0$ から$\phi = \pi/4$ まで積分して上式を計算したときの t の値が、周期の $1/4$ になるということです。

これを式にすると。

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

となります[4]。

ここで $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$ は $k^2\sin^2\phi$についてテイラー展開できて、

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = 1 + \frac{1}{2}(k^2\sin^2\phi) + \frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{4}(k^2\sin^2\phi)^2 + \cdots$$

のようになるので、これを ϕ について積分すると

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}(k^2\sin^2\phi) + \frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{4}(k^2\sin^2\phi)^2 + \cdots\right) d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}(k^2\sin^2\phi)\right) d\phi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{4}(k^2\sin^2\phi)^2\right) d\phi + \cdots \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)k^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)k^4 + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

となるので、ようやく T が k の式で表せて、

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{32}k^4 + \cdots\right)$$

となりました。

一方、振幅は θの最大値であるのでそれをαとすると、そのとき $z = \sin\phi = 1$ であるので、$k = \sin\alpha/2$ となります。さらに αが十分小さいときは $k \fallingdotseq \alpha/2$ となり、これを上に代入すると、

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2 + \frac{3}{512}\alpha^4 + \cdots\right)$$

と表せました。ただし T_0は、振幅が微小だとしたときの単振動近似における周期です。これを見ればわかるとおり、αが 1 ラジアン（$\fallingdotseq 57^\circ$）程度より小さければ $T \fallingdotseq T_0$と見なして良さそうです[5]。

以上です。単振り子をかなり詳しく解析してみました。結構なマニア向けですね…。もちろんテストには出ません（笑）悪しからず。

[3]ここは議論が曖昧（必要十分になっているかが怪しい）ですが、先生がやっていたのでおそらく大丈夫だしテストにも出ないので無視します…。

[4]ちなみに右辺の積分値のことを「第一種の完全楕円微分」と言うらしいです。これこそ「あっそ」な気もしますが…。

[5]あまりαが大きくなると k が 1 に近づいてまずいことになるみたいです。

2　地球による万有引力について

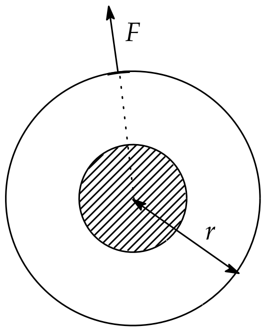
ここでは、密度分布が球対称な地球の内部にある質点に働く地球の万有引力を考えるときは、「地球と同じ中心を持ち質点を含む球面」の内側の質量が、地球の中心に全て集まったと仮定したときの引力と等しく、その球面の外部からの引力は考えなくて良い、ということを証明します。

教科書では重積分とポテンシャルを用いてかなりテクニカルに示していますが、授業では立体角（ステラジアン）を用いて比較的シンプルに示しました。

2.1　質力が中心に集まったとして良いことの証明

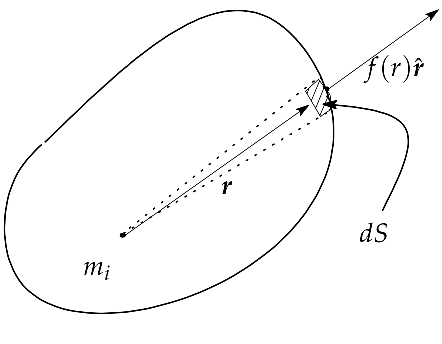
曲面の内部にある質点の集合が、曲面を収縮させる方向に及ぼす力の全体を考えます。前提としては「球面内の質量分布（密度）は球対称で、その中心は球面の中心と一致している」ことと、「そのとき球面のどの微小面積においても等しい万有引力が働く」ことを仮定します。

まず、上のような仮定をしておいたので、密度 1 の球面の内部に質量分布が球対称な質点系がある状態を考えます。

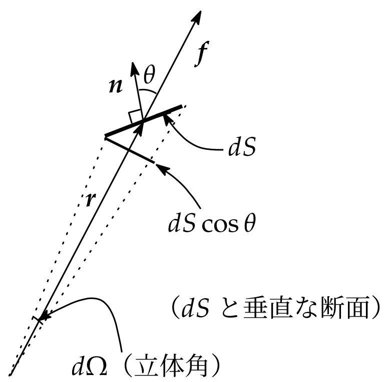


球面上のどの微小面積にも等しい大きさ F の力が働くとすると、曲面全体に働く、外向きを正とした力の大きさ[6] F_{tot} は表面積と F の積で、$F_{tot} = F \times 4\pi r^2$

一方、曲面一般について考えます。



閉曲面 S



上のように色々と文字を置きます。密度が 1 の曲面内にある質量 m_i の質点が、曲面上の微小面積 dS に力を及ぼしています。曲面上の単位質量に働く万有引力は、外向きを正として $f(r) = -G\dfrac{m_i \times 1}{r^2}$ となります。

$\hat{\boldsymbol{r}}$は$\boldsymbol{r}$方向の単位ベクトルで、質点が及ぼす万有引力$\boldsymbol{f}(r)$ が$\boldsymbol{r}$の方向を向いていることを表します。Ωは立体角、θは$\boldsymbol{f}$と dS のなす角です

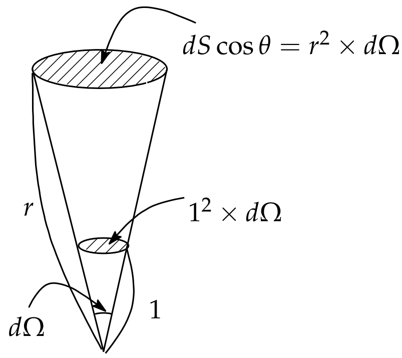
m_1が微小面積 dS に及ぼす外向きの力を F_iとすると、その微小量 dF_iは、単位質量当たりの引力$\boldsymbol{f}$の微小面と垂直な成分（これを f_n とします）と微小面積 dS の積、つまり$\boldsymbol{f}$と $d\boldsymbol{S}$ の内積です。なので

$$F_i = \int_S f_n dS = \int_S \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S f(r) \cdot 1 \cos\theta dS = \int_S \left(-\frac{Gm_i}{r^2} \cdot 1 \cdot \cos\theta dS \right)$$

[6] 曲面を広げようとする（実際には引力なので縮めようとする）力のことです

と表せます。面積積分表示をしていますが、曲面上の全ての微小面積について足し合わせるというだけです。

ここで、頂角Ω、母線長 1 の円錐の底面積がΩとなることから、頂角Ωで母線長 r の円錐の底面積は相似比から $r^2 \cdot \Omega$となるので、先ほどの断面図と一緒に考えると、底面積について $r^2\Omega = dS\cos\theta$ となります。[7]



以上より、

$$F_i = \int_S \left(-\frac{Gm_i}{r^2}\cos\theta dS\right) = \int_S \left(-\frac{Gm_i}{r^2}r^2 d\Omega\right) = -Gm_i\int_S d\Omega = -\frac{Gm_i}{r}\cdot 4\pi \cdot 1^2 = -4\pi Gm_i$$

となります。ただし、右から二番目の等号は、$\int_S d\Omega$ が、半径 1 の球面上の微小面積 $1 \cdot d\Omega$ を球面上全てで足し合わせたものになるので、その球の表面積 $4\pi 1^2$ を表すためです。

あとは曲面内にある全ての質点についてこの F_i を足し合わせれば、全ての質点から曲面が受ける力 F_{tot} が求まります。

$$F_{tot} = \sum_i F_i = \sum_i(-4\pi Gm_i) = -4\pi G\sum_i m_i = -4\pi GM$$

となります。ただし M は曲面内に含まれる全質量です。

そして、先ほどとこの場合の F_{tot} は、初めの仮定が成り立つ状態であれば等価なので、$F_{tot} = -4\pi GM = 4\pi r^2$ となり、$F = -\dfrac{GM}{r^2}$ が導かれます。

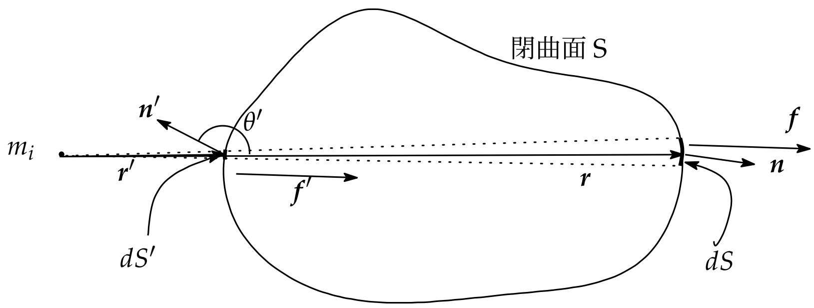
この結果から、**中心が等しい球対称な質量分布を内包する球面の上にある質点に働く万有引力は、内部の全質量が中心に集まった時のものと同じである**ことがわかります。

2.2 外部からの力は働かないことの証明

先ほどと本質的には変わりません。今回は、曲面内の質点が曲面を広げ（縮め）ようとする力が差し引きゼロになることが導かれます。

外部にある質点であろうと、対称性から F_{tot}が $4\pi r^2 F$ と表せることは変わりません。

次に、先ほどと同じように $\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めるのですが、質点が外部にあるので、力は二箇所に働くことに注意します。スペースというか図の細かさのせいで $d\Omega$とθ を省いていますが、次の図のようになります。



[7]正確には母線長が r ではありませんが、極限を考えれば同じになると思うので許してください…。

曲面を外向きに広げる力の微小量は、$dF_i = \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} + \boldsymbol{f}' \cdot d\boldsymbol{S}' = f \cos\theta dS + f' \cos\theta' dS'$となります。

ここで、$dS \cos\theta = r^2 d\Omega$であることは同じですが、$\theta'$については図より$\cos\theta'$は負であり、面積は負となり得ないので、$r'^2 d\Omega = dS' \cos(\pi - \theta') = dS' \cos\theta'$ となります。

これらを代入すると、

$$F_i = \int_S \{(-GMd\Omega) - (-GMd\Omega)\} = 0$$

となり、曲面が外部の質点から受ける「広がる方向への力」は 0 になります。なので、もちろん F_{tot} も 0 になります。

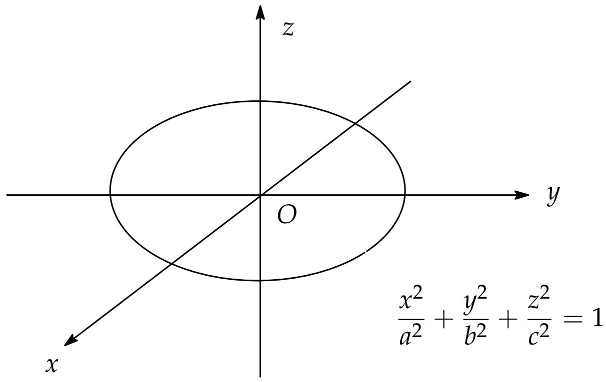
$F_{tot} = 0$ なので $F = 0$ となり、球面上の任意の点において、曲面外にある「密度が球対称な質点の集合」から受ける万有引力は 0 になることが示されました。ちなみに教科書ではこれも重積分を使ってポテンシャルを考えてねちねちと導いています。今回のやり方がねちねちしていないかどうかはともかく、計算の煩雑さは少ないような気がします。

以上です。高校ではこの事実を「知られている事実」として使って地球内単振動を考えていましたが、実際に導くとこのようになるということです。外部からの力が 0 になることを、教科書では対称性と打ち消し合いを使って上手く説明しています[8]。これは読んでおくべきかもしれません。

[8] ここでは球面外の任意の質点からの引力を考えましたが、教科書ではある質点を内包する球殻からの引力を考えています。混乱しやすいので注意。

3 楕円体の慣性モーメント

楕円体の慣性モーメントを求めておきます。テストに出るかもと言われたので、導出法は丸暗記しておきましょう。



慣性モーメントは

$$I=\sum_j m_j r_j^2$$

で定義されました。ここでは x 軸周りの慣性モーメントを考えましょう。その他の軸周りは文字を入れ替えれば OK です。計算は $\sum$ の極限として積分を使います。

微小質量 は、密度ρに微小体積 $dxdydz$ を掛けて $dm=\rho dxdydz$ となります。

一方 r のほうは、x 軸回転なので x 軸から微小体積までの距離です。$r=\sqrt{y^2+z^2}$ です。

従って慣性モーメント I は、体積積分を用いて（定義域内の全ての微小体積について足し合わせる）

$$I=\int_V(\rho dxdydz)\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2=\rho\int_V(y^2+z^2)dxdydz$$

となりました[9]。ここで、後の計算をやりやすくするために文字の置き換えをします。

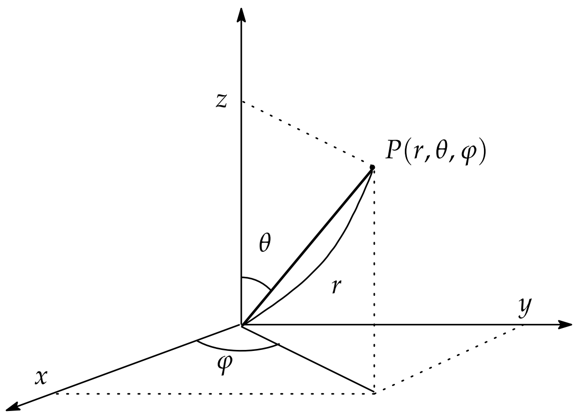
$$x=aX、y=bY、z=cZ$$

とすると、楕円の定義式から $X^2+Y^2+Z^2=1$ が成り立ちます[10]（下の注釈を見ておいてください）。

よって、I は

$$I=\rho\int_V\left((bY)^2+(cZ)^2\right)(abc)dXdYdZ=\rho abc\int_V\left((bY)^2+(cZ)^2\right)dXdYdZ$$

となります。ここで再び座標変換を行います。今度は先ほどよりやや複雑で、「球座標」を取ります。教科書を参照…と書こうとしたら教科書に載ってないんですね。ぐおお。解説します。



[9] 上にある x,y,z の「文字」は全て定義域内のものです。それっぽっく書くなら「$x,y,z\in V$」です

[10] ここでは直交座標空間の基底ベクトルを変換（といってもスカラー倍ですが）したことになります。単位微小体積が球になるように「座標を圧縮して新しい座標を取った」といえば少しわかりやすいでしょうか。

上の図のように、座標を r（位置ベクトルの長さ（半径））、θ(z 軸からの回転角（極角））、φ（x 軸からの回転角（方位角））の三つで表します。図からわかるとおり、

$$\begin{cases} X = r\sin\theta\cos\varphi \\ Y = r\sin\theta\sin\varphi \\ Z = r\cos\theta \end{cases}$$

となります。これで X, Y, Z を r, θ, φ で表せました。それぞれの定義域、$r \in [0, \infty)$、$\theta \in [0, \pi]$、$\varphi \in [0, 2\pi)$ にも注意しましょう。

また、単位体積についても変換しなければなりません。球座標における単位体積は、r, θ, φ のそれぞれの方向の単位微小ベクトルの大きさの積で表せます。それぞれのベクトルの大きさを dl_r、dl_θ、dl_φ のように表すと、

$$\begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = d(r\theta) = rd\theta \\ dl_\varphi = d(r\sin\theta\cdot\varphi) = r\sin\theta d\varphi \end{cases}$$

であるので[11]、微小体積 $dXdYdZ$ を変換すると

$$dXdYdZ = dl_r dl_\theta dl_\varphi = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

となります。これより、慣性モーメントを求める式は

$$\begin{aligned} I &= \rho abc\int_V \left((br\sin\theta\cos\varphi)^2 + (cr\cos\theta)^2\right)(r^2\sin\theta drd\theta d\varphi) \\ &= \rho abc\int_V r^4\left(b^2\sin^3\theta\cos^2\varphi + c^2\cos^2\theta\sin\theta\right)drd\theta d\varphi \\ &= \rho abc\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 dr\left\{r^4(b^2\sin^3\theta\cos^2\varphi + c^2\cos^2\theta\sin\theta)\right\} \end{aligned}$$

となりました。r の変域が 0 から 1 なのは、定義されている体積が半径 1 の球 $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ だからです。

あとは計算するだけです。高校の知識を活用して計算していきましょう。

$$\begin{aligned} I &= \rho abc\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 dr\left\{r^4(b^2\sin^3\theta\cos^2\varphi + c^2\cos^2\theta\sin\theta)\right\} \\ &= \rho abc\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\left\{\frac{1}{5}\left(b^2\sin^3\theta\cos^2\varphi + c^2\cos^2\theta\sin\theta\right)\right\} \\ &= \frac{1}{5}\rho abc\int_0^\pi d\theta\left(b^2\sin^3\theta\cdot\pi + c^2\cos^2\theta\sin\theta\cdot 2\pi\right) \\ &= \frac{\pi}{5}\rho abc\int_0^\pi d\theta\left\{(b^2 - 2c^2)\sin^3\theta + 2c^2\sin\theta\right\} \qquad \leftarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \\ &= \frac{\pi}{5}\rho abc\int_0^\pi d\theta\left\{(b^2 - 2c^2)\frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) + 2c^2\sin\theta\right\} \qquad \leftarrow \text{三倍角} \\ &= \frac{\pi}{5}\rho abc\left\{(b^2 - 2c^2)\frac{1}{4}(3\cdot 2 - \frac{2}{3}) + 2c^2\cdot 2\right\} \\ &= \frac{4}{5}\pi\rho abc(b^2 + c^2) = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\pi\rho abc(b^2 + c^2) \end{aligned}$$

お疲れ様でした（自分に）。最後にこの楕円体の質量を求めておきます。これは一行で計算できます。

$$M = \int_V \rho dxdydz = \rho\int_V dxdydz = \rho\cdot(\text{楕円体の体積}) = \frac{4}{3}\pi\rho abc$$

以上より、回転楕円体の慣性モーメントは

$$I = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2)$$

となります。これくらいやったのだからテストに出て欲しいですね。

[11] 細かい説明は省略しました。他の授業で知っている人もいるだろうし、今後よく使うので自分で理解して欲しいし、説明が面倒だからです（笑）