力学　レポート補足プリント

手書きのところでは書ききれなかった（書ききらなかった）分を $\TeX$ で打っておきます。図は基本的に省略します。各自描いてみてください。

1　全体に関して

採点は解析のそれっぽさで決まると書きましたが、先生は「どれだけ具体的に解析しているかを相対的に評価する」と言っていました。順位としてはおそらく

物理オタク > 理系の極み >>>> 頑張った人 > 何とか書いた人 > 残念な子 >> 未提出

になるので、どうにかして「頑張った人」くらいには入りたいところです。

なお十分理解しているとは思いますが、**解析に際しては「本質ではないところを無視（近似）」して「本質はしっかりと考える」**というスタンスが大事です。今回に関して言えば、猫がどれくらいの高さから落ちても平気かなんて、「猫は空中回転できる」という事実さえ知っていれば、何もややこしいことを考えなくてもそれに要する時間を推測して最後の式を書けばよいのですが、ここで求められているのはそういうことでは無いのですから、**「解析」を主として行うようにしましょう**。

もうひとつ、これは説教じみてしまいますが、解析するときには「実際の事象を扱っている」ことを忘れないようにしましょう。いくら実物に似せてモデル化したとはいえ、それは机の上の話です。このような単純明快な例では何も問題ないのですが、より複雑になってくるとモデルを対象とした計算にばかり心をとられて忘れてしまうことがあるかも知れません。ここに来ているような賢い人たちがリアリティを失ってしまったら、技術だけが一人歩きしてしまいます。…説教が過ぎるのでこれくらいで中断。

2　回転運動方程式

予習復習をして、授業をちゃんと理解していれば問題ないかもしれませんが、この範囲は高校でやっていないと思うので一応解説しておきます。教科書は先生も言うように非常に詳細で良いのですが、少し情報が多すぎるような気がします。なので、ここでは剛体の回転運動方程式まで（教科書では 5、6、7 章に渡る内容）を簡潔に解説しておきます。教科書を一通り理解している人は読み飛ばしても結構です。

2.1　運動方程式の積分

まず、ニュートン力学における因果律として運動の第二法則（運動方程式）

$$\dot{\boldsymbol{p}}\left(=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=m\boldsymbol{a}\right)=\boldsymbol{F}$$

があります。左辺は色々な書き方があるため括弧の中が複雑になってしまいましたが、つまり質点の運動量の一階微分が外力に等しい、ということを言っています。以下ではベクトルはボールド体で $\boldsymbol{r}$ などと書いて、時間微分はドット $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を使います。

上の方程式を、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と外力 $\boldsymbol{F}$ の関係、つまり「$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}$」と見れば、これは時間の二階微分方程式です。運動が比較的簡単な場合、両辺を二回積分することで質点の座標が時間の関数として求まります。

しかし、実際には完全に時間の関数で表すのが困難だったり（積分が難しかったり）、そこまで求める必要もない場合が出てきます。そんなときは、上の方程式を上手く一回積分することで、何らかの「関係式」を求めるのでした。そのように導かれる関係式として

1. 運動量と力積の関係
2. エネルギーと仕事の関係

3. 角運動量と力のモーメントの関係

の三つがありました。1 は「$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$」の両辺を直接積分したもので[1]、左辺は運動量の変化量「$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1$」、右辺は力積「$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt$」を表し、その意味としては「運動量の変化は与えられた力積に等しい」ということです

次に 2 は、両辺に速度成分$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$を内積してから積分するいわゆる「エネルギー積分」をした結果であり[2]、左辺は「$m\dot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) \underset{\text{積分}}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}mv^2$」となり運動エネルギーを表し、右辺は「$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt$」となって力$\boldsymbol{F}$のした仕事を表します。特に外力が位置のみの関数の場合、右辺はその力の「ポテンシャル」と呼ばれることは非常に重要ですがここでは説明している暇がないので省略します。

そして、3 は運動方程式「$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$」の両辺に位置ベクトル$\boldsymbol{r}$を左から外積（ベクトル的に掛ける）したもので[3]、左辺は「$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$」[4] となり、これを積分した $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は回転している質点の「回転の勢い」を表しています。これを「角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$」と呼ぶことにします。一方右辺は「$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$」となり、高校でも習った力のモーメントを表しています。

両辺を積分すれば、角運動量を力のモーメントの積分式で表した方程式になりますが、実際に使う際には積分しない方が便利なのでここで止めておきます。

$$\dot{\boldsymbol{L}}\left(= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})\right)(\text{角運動量の時間変化率}) = \boldsymbol{N}\,(= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})\,(\text{力のモーメント})$$

これを質点の回転運動方程式と呼びます。特に角運動量は、回転軸が固定されている場合は$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{p}$が直交するので $\boldsymbol{L} = r \cdot p = mr^2\omega$ となることに注意しましょう。

2.2 剛体の運動

上の運動方程式と回転運動方程式を、剛体を形成する全ての質点に関して足し合わせます。ここは $\sum$ 計算が出てきて説明が面倒なので教科書に任せますが結果としては、剛体の運動は二つの方程式で記述できることになります。

一つは重心の運動方程式「$M\ddot{\boldsymbol{r}}_G = \boldsymbol{F}_{\text{外力}}$」です。剛体を一つの系として見た場合、剛体内の力は全て内力として扱われるので、外力の影響だけによって重心は運動します。

もう一つは回転運動方程式「$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F})$」で、これも全ての質点について足し合わせたものになります。

ここで、剛体の回転軸が固定されている場合を考えます。先ほどの注意で書いた通り、$\boldsymbol{L} = r \cdot p = mr^2\omega$ となるので、回転運動方程式の左辺はこれを足し合わせればいいことになります（外積を考えなくて良い）。実際に足し合わせると

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i r_i^2 \omega\right) = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\frac{d}{dt}\omega$$

のようになります。ω を外に出しただけじゃないかと言われてしまえばそうなのですがこれはそれなりに重要で、括弧でくくった部分は時間変化しないので微分の外に出せるのです。つまり、固定軸周りの角運動量の変化率は「物体に固有の値（$\sum mr^2$）と回転角の変化率の積」で表せるということです。ではその「物質に固有の値」を導入しようということで「慣性モーメント I」が登場します。

実際に慣性モーメントは、$\sum$ の極限の積分を使って求めます。その例が教科書の p.172 に載っているということです。

長くなりましたがこんなところです。書いてからわかりましたが、後半とか特に教科書読めばいいですね。はいすいません。

---

[1]教科書 p.26
[2]教科書 p.45
[3]教科書 5 章
[4] $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \underset{\text{連鎖律}}{=} \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p}$で、$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$と$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$は平行なので左辺第一項は$\boldsymbol{0}$

3　回転の原動力について

「計算方法」のところで書きましたが、　は瞬間的に初期角速度を与え、一定の角速度で回転した後、瞬間的にそれを止めるという方法を使っています。角運動量は保存するので、二物体系ではお互い逆方向に慣性モーメントの逆比の速さで回転を始めます。

一方　では、等しい力のモーメントを与え続ける場合を考えます。角運動方程式「$I\ddot{\varphi} = I\dot{\omega} = N$」から、角速度$\omega$は時間の一次関数、回転角$\varphi$ は時間の二次関数です。　と　で回転角が同じになるようにモデルを考えるには、

$$\int_0^T \omega_0 t dt = \int_0^T \frac{1}{2} N t^2 dt$$

となるように初期速度（ω_0）や与える定モーメント（N）を定めなければなりません。

4　円柱の慣性モーメント

円柱の慣性モーメントの求め方を書いておきます。その際「円柱座標」というものを使いますが、変数を z 座標の z、x 軸からの方位角θ、z 軸からの距離 r で表すということだけです。

では実際に円柱の慣性モーメントを求めておきます。円柱

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ -\dfrac{l}{2} \leq z \leq \dfrac{l}{2} \end{cases}$$

について、その全質量は簡単に表せて、

$$M = \int_V \rho dxdydz = \rho \times (\text{円柱の全体積}) = \pi \rho a^2 l$$

となります。なお、重心は原点です。

4.1　z 軸（対称軸）周りの回転

慣性モーメント I_z は、

$$I = \int_V (\rho dxdydz) \cdot (x^2 + y^2) = \rho \int_V (x^2 + y^2) dxdydz$$

と表せます。ここで、最初に言ったとおり円柱座標を導入すると、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

となり、微小体積について

$$dxdydz = dl_r dl_\theta dl_z = rdrd\theta dz$$

が成り立ちます[5]。これを用いると、

$$\begin{aligned} I_z = \rho \int_V (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) rdrd\theta dz &= \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a dr(r^3) \\ &= 2\rho \int_0^{\frac{l}{2}} dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} a^4 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\rho \int_0^{\frac{l}{2}} 2\pi a^4 dz \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho a^4 l = \frac{1}{2} M a^2 \end{aligned}$$

となります。

[5]座標変換については、「授業内容解説」のファイルも見てください

4.2 x 軸周りの回転

慣性モーメント I_x は、

$$I_x = \rho \int_V (y^2 + z^2) dxdydz$$

と表せます。ここでも同様に円柱座標を導入すると、

$$\begin{aligned}
I_x = \rho \int_V (r^2 \sin^2\theta + z^2) r dr d\theta dz &= \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta (r^3 \sin^2\theta + r z^2) \\
&= \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \int_0^a (\pi r^3 + 2\pi r z^2) dr \\
&= \pi\rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{a^4}{4} + a^2 z^2 \right) dz \\
&= 2\pi\rho \left(\frac{a^4}{4} \cdot \frac{l}{2} + \frac{a^2}{3} \cdot \frac{l^3}{8} \right) \\
&= \frac{1}{12} \pi\rho a^2 l (l^2 + 3a^2) = \frac{1}{12} M (l^2 + 3a^2)
\end{aligned}$$

となります。体積積分の計算で重要なのは、計算のしやすい座標に変数を変換することです。その際に、微小体積（微小単位ベクトル）がどう変わるのかをしっかり把握しておきましょう。